



Finite-Elemente-Analyse von selbstähnlichen Tragstrukturen

Finite-Elemente-Analyse von selbstähnlichen Tragstrukturen

Daniel Petró

Daniel Petró

Finite-Elemente-Analyse von selbstähnlichen Tragstrukturen

von

Daniel Petró

EINE BACHELORARBEIT
EINGEREICHT AM DEPARTEMENT MASCHINENBAU
ZUR ERLANGUNG DES AKADEMISCHEN GRADES DES

BACHELOR OF SCIENCE IN WIRTSCHAFTSINGENIEURWESEN

AN DER
UNIVERSITÄT SIEGEN

DEZEMBER 2016

Erstprüfer & Betreuer: PD Dr.-Ing. habil. Bernhard Eidel
Zweitprüfer: M.Sc. Ajinkya Gote

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, diese Arbeit selbstständig verfasst zu haben und alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Arbeiten anderer entnommen sind, als solche kenntlich gemacht zu haben.

Signatur.....

Daniel Petró
10. Dezember 2016

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Hintergrund	5
2.1. Stabknicken	5
2.2. Fraktales Raumstabwerk	9
2.3. Die Finite-Elemente-Methode bei Stabilitätsproblemen	16
2.3.1. Die Finite-Elemente-Methode	16
2.3.2. Stabilitätsprobleme	17
2.3.3. Finite-Elemente-Analyse des Knickstabes	19
3. Stabilitätsanalyse des fraktalen Stabwerks	23
3.1. Netzgenerierung	23
3.1.1. Stabwerk	23
3.1.2. Fraktales Stabwerk	25
3.1.3. Netzverfeinerung	25
3.1.4. Allokation	26
3.2. Lineare Stabilitätsanalyse	27
3.2.1. Gelenkige Verbindung	28
3.2.2. Biegesteife Verbindung	29
3.3. Nichtlineare Stabilitätsanalyse	33
4. Fazit	35
A. Eigenschaften des fraktalen Raumstabwerkes	37
A.1. Längen der einzelnen Substrukturen	37
A.2. Federkonstante	38
B. Dimension selbstähnlicher Objekte	41
Literaturverzeichnis	45

Abbildungsverzeichnis

1.1. Selbstähnlichkeit in der Natur	2
1.2. Selbstähnlichkeit in der Mathematik	2
2.1. Ein Freikörperbild eines ausgeknickten Stabes bei beidseitig gelenki- ger Lagerung.	5
2.2. Die ersten drei Eigenformen eines beidseitig gelenkig gelagerten Stabes.	8
2.3. Die vier Eulerschen Knickfälle.	8
2.4. Ein fraktales Raumstabwerk in unterschiedlichen Generationen. . .	10
2.5. Raumstabwerk mit 20 Oktaedern als beidseitig gelenkig gelagerter Balken	13
2.6. Das dimensionslose Kraft-Volumen-Verhältnis des fraktalen Stabwerks.	14
2.7. Die dimensionslose Kraft f bei Nutzung von Rohrprofilen.	15
2.8. lokales Beulen in einem Parylene Gitter	16
2.9. Das Konvergenzverhalten von Abaqus-Balkenelementen bei einer linearen Stabilitätsanalyse.	21
2.10. Dimensionslose Kraft-Verschiebungskurven eines beidseitig gelenkig gelagerten Stabes bei Kompressionsbelastung.	22
3.1. Die Anzahl der Freiheitsgrade in Abhängigkeit vom dimensionslosen Volumen v bei Nutzung von elf Balkenelementen (B31) pro Stab. . .	28
3.2. Vergleich der analytischen Knicklasten F_{ana} mit den Knicklasten aus linearen Stabilitätsanalysen F_{fem}	29
3.3. Eigenformen einer Struktur der ersten Generation ($\log_{10}(v) = -1,06$) bei gelenkiger Verbindung.	30
3.4. Eigenformen einer Struktur der zweiten Generation ($\log_{10}(v) =$ $-1,45$) bei gelenkiger Verbindung.	30
3.5. Vergleich der kritischen Lasten aus linearen Stabilitätsanalysen bei gelenkiger Verbindung F_{gel} und biegesteifer Verbindung F_{starr}	31
3.6. Eigenformen einer Struktur der ersten Generation ($\log_{10}(v) = -1,06$) bei biegesteifer Verbindung.	32
3.7. Eigenformen einer Struktur der zweiten Generation ($\log_{10}(v) =$ $-1,45$) bei biegesteifer Verbindung.	32
3.8. Dimensionslose Kraft-Verschiebungskurven bei gelenkiger Verbin- dung unter Kompressionsbelastung.	33

3.9. Dimensionslose Kraft-Verschiebungskurven bei biegesteifer Verbindung unter Kompressionsbelastung.	34
A.1. Elementarzellen des fraktalen Stabwerks	38
B.1. Cantor-Menge	42

Algorithmenverzeichnis

- 3.1. Generierung des Fachwerks 24
- 3.2. Generierung des fraktalen Stabwerks 25
- 3.3. Netzverfeinerung 26

1. Einleitung

Selbstähnliche Strukturen sind Strukturen, die skaleninvariant sind. Diese Invarianz (Symmetrie) zeichnet sich dadurch aus, dass Teile verkleinerte Kopien des Ganzen sind. In der Natur sind Strukturen mit dieser Eigenschaft an vielen Stellen anzutreffen. So sind zum Beispiel Farne selbstähnlich (siehe Abbildung [1.1a](#)) und auch die Kammern in der Schale eines Nautilus' zeigen Selbstähnlichkeit (siehe Abbildung [1.1b](#)). In der Technik ist das Prinzip der Selbstähnlichkeit zum Beispiel in der Fraktalantenne [\[8\]](#) umgesetzt worden.

Es stellt sich die Frage, ob diese von der Evolution hervorgebrachte und gehäuft vorkommende Struktur als effektives Konstruktionsprinzip vermehrt Anwendung in den Ingenieurwissenschaften finden sollte.

Die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit wird unter anderem von der fraktalen Geometrie untersucht. Dieses Teilgebiet der Mathematik wurde im Wesentlichen durch das Werk „The fractal geometry of nature“ [\[11\]](#) des Mathematikers Benoît Mandelbrot begründet. Wie der Titel vermuten lässt, war die Tatsache, dass in der Natur vielfach fraktale Gebilde vorkommen, die sich nicht durch die Objekte der euklidischen Geometrie wie z.B. Kugel und Zylinder beschreiben lassen, der Ausgangspunkt des Werkes: „Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line.“ ([\[11\]](#) S. 44)

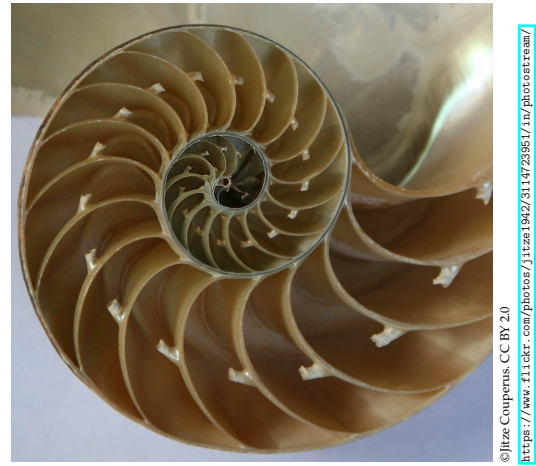
Selbstähnlichkeit ist eine typische Eigenschaft von Fraktalen. Allerdings sind nicht alle Fraktale selbstähnlich und auch nicht alle selbstähnlichen Objekte fraktale Gebilde. Eine Linie ist z.B. trivialerweise selbstähnlich, aber nicht fraktal. Ein hinreichendes Kriterium für ein Fraktal ist, dass die Hausdorff-Dimension größer als die topologische Dimension ist. Für die weitere Diskussion wird auf die Literatur wie z.B. auf das o. a. Werk Mandelbrots [\[11\]](#) und auf den Anhang [B](#), in dem die Dimension selbstähnlicher Objekte erläutert und thematisiert wird, verwiesen. Beispiele mathematischer Objekte, die selbstähnlich und fraktal sind, sind in Abbildung [1.2](#) zu sehen. Hierbei lässt sich die Selbstähnlichkeit bis ins Unendliche fortsetzen. Im Gegensatz hierzu ist die Fortsetzung der Selbstähnlichkeit in der Natur begrenzt. So hat zum Beispiel die Koch'sche Schneeflocke (siehe Abbildung [1.2b](#)) einen unendlich großen Umfang, aber paradoxerweise einen endlichen Flächeninhalt.

In dieser Arbeit wird eine systematische strukturmechanische Analyse zu Deformation und Versagen von selbstähnlichen Tragstrukturen unter Anwendung der Finite-Elemente-Methode durchgeführt, wobei ein wesentlicher Teil darin besteht das Finite-Elemente-Netz, welches für die Analyse benötigt wird, automatisiert zu

1. Einleitung

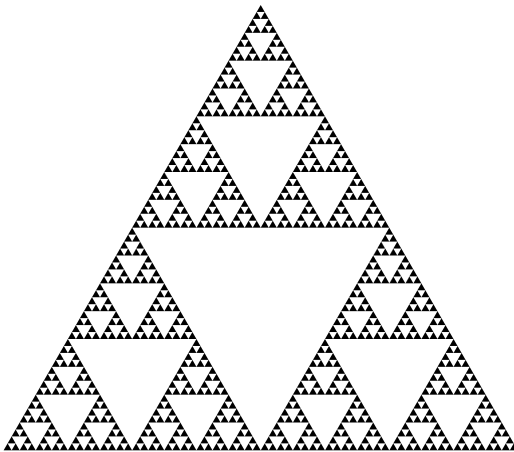


(a) Farn

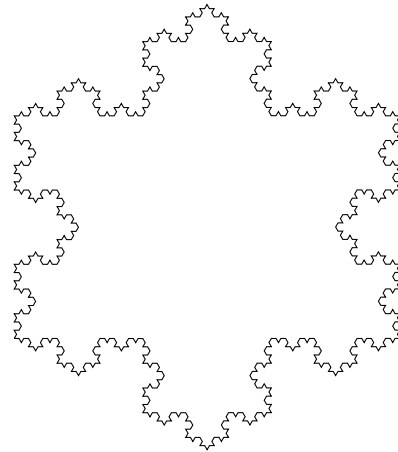


(b) Längsschnitt der Schale eines Nautilus

Abbildung 1.1.: Selbstähnlichkeit in der Natur



(a) Sierpinski-Dreieck



(b) Koch'sche Schneeflocke

Abbildung 1.2.: Selbstähnlichkeit in der Mathematik

generieren.

Bei den hier untersuchten Tragstrukturen handelt es sich um fraktale Raumstabwerke. Diese wurden zum ersten Mal von den Physikern Robert Farr und Yong Mao in [4] beschrieben und unter vereinfachenden Annahmen analytisch optimiert. Bei der Untersuchung wurden Vollprofil-Stäbe benutzt. In [14] wurde die Untersuchung auf fraktale Raumstabwerke mit Hohlprofil-Stäben ausgeweitet. Die Resultate dieser Arbeiten lassen auf einen vielversprechenden Beitrag zum Leichtbau hoffen. In [15] werden die analytischen Resultate mit den experimentellen Untersuchungen zweier durch den 3D-Druck tatsächlich gefertigter Strukturen verglichen. Die experimentellen Ergebnisse zur Mechanik der Stabstrukturen zeigten dabei erhebliche Abweichungen von den analytischen Berechnungen. Eine komplett nichtlinear durchgeführte Finite-Elemente-Analyse konnte hingegen das Verhalten der einen Struktur ansatzweise und das der anderen sehr gut widerspiegeln.

In Kapitel 2 wird zunächst auf die zugrundeliegende Theorie eingegangen, die zum weiteren Verständnis der Tragstrukturen und der Simulation mittels der Methode der finiten Elemente benötigt wird. Dazu werden wesentliche Theorien und Konzepte hergeleitet. Auch die analytischen Rechnungen, die zur Optimierung der Strukturen benötigt werden, werden nachvollzogen und hergeleitet. Außerdem werden die Ansätze, die in [4, 14] verwendet werden, insbesondere aus der anwendungsorientierten Perspektive des Ingenieurs kritisch hinterfragt.

Mit Kapitel 3 folgt dann schließlich die Stabilitätsanalyse der Struktur mittels der Finiten-Elemente-Methode. Hierbei wird zunächst auf die Algorithmen zur automatisierten Erzeugung des Finite-Elemente-Netzes eingegangen. Anschließend wird eine lineare Stabilitätsanalyse gefolgt von einer nichtlinearen Stabilitätsanalyse durchgeführt.

2. Hintergrund

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Begriffe, Gleichungen und Zusammenhänge der Stabilitätstheorie und der Finiten-Elemente-Methode für die Untersuchung von Raumstabwerken erläutert und hergeleitet. Dabei wird im Speziellen auf das in [4] beschriebene fraktale Raumstabwerk eingegangen und die analytischen Rechnungen werden nachvollzogen.

2.1. Stabknicken

Wir betrachten einen gelenkig gelagerten Stab¹ mit der Länge L (siehe Abbildung 2.1). Dieser Stab wird mit der Kraft F komprimiert. Dabei machen wir die Annahme, dass der Stab anfangs perfekt gerade ist und die Kraft konzentrisch in der Stabachse wirkt. Aus Erfahrung wissen wir, dass der Stab ab einer bestimmten Last wegnicken wird. Man denke dabei zum Beispiel an ein Lineal, welches komprimiert wird.

Um diese kritische Last zu ermitteln, wird der verformte Stab freigeschnitten (siehe Abbildung 2.1) und die Schnittkräfte mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow 0 = F + N(x) \Leftrightarrow N(x) = -F \quad (2.1)$$

$$\sum M_x = 0 \Leftrightarrow 0 = M(x) - Fw(x) \Leftrightarrow M(x) = Fw(x) \quad (2.2)$$

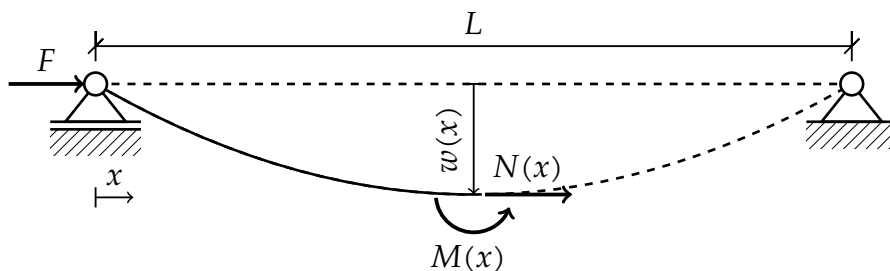


Abbildung 2.1.: Ein Freikörperbild eines ausgeknickten Stabes bei beidseitiger gelenkiger Lagerung.

¹Genau genommen handelt es sich in dieser Herleitung der Verschiebungsdifferentialgleichung nicht um einen herkömmlichen Stab, sondern um einen Stab, der zusätzlich zu den Normalkräften noch Biegemomente aufnehmen kann (vgl. dazu auch [17]).

2. Hintergrund

ermittelt. Hierbei wird die Summe der Momente um den Schnittpunkt an der Stelle x erstellt. Da der Stab um $w(x)$ auslenkt, tritt in diesem zusätzlich zu der Normalkraft F das Biegemoment $M(x) = Fw(x)$ auf. Dabei wird die Annahme einer dehnungslosen Stabachse getroffen²

Für das Biegemoment als spannungsresultierende Größe gilt

$$M(x) = \int_A \sigma_x(x, y, z) z \, dA. \quad (2.3)$$

Die y -Koordinate zeigt in Richtung des Lesers und die z -Koordinate nach unten. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt in der Stabachse. Wählt man für die Verteilung der Spannung über die Querschnittsfläche den linearen Ansatz $\sigma_x = cz$ mit der Konstanten c , gilt für Gleichung (2.3)

$$M(x) = \int_A cz^2 \, dA = cI = \frac{\sigma_x}{z} I. \quad (2.4)$$

Dabei ist I das Flächenträgheitsmoment $\int_A z^2 \, dA$. Ist das Material linear elastisch, gilt das Hookesche Gesetz mit dem Elastizitätsmodul E und der Verschiebung $u(x)$ in Richtung der x -Achse

$$\sigma_x = E\varepsilon(x) = E \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Für die Verschiebung $u(x)$ gilt für kleine Verformungen bei einem Biegewinkel θ

$$u(x) = -z\theta. \quad (2.6)$$

Aus den Gleichungen (2.4), (2.5) und (2.6) folgt die Biegewinkel-Biegemoment Beziehung

$$M(x) = -EI \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (2.7)$$

Unter der Annahme, dass die Querschnitte orthogonal zur Stabachse bleiben (Bernoulli-Hypothese),

$$\theta = \frac{dw}{dx}, \quad (2.8)$$

erhält man letztlich die Verschiebungsdifferentialgleichung für das Stabknicken

$$\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} + \frac{F}{EI} w(x) = 0. \quad (2.9)$$

²für eine genauere Betrachtung siehe z.B. [13]

Sind der Elastizitätsmodul E , das Flächenträgheitsmoment I und die Kraft F konstant, ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung [5]

$$w(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}}x\right). \quad (2.10)$$

Die Konstanten C_1 und C_2 lassen sich durch Randbedingungen bestimmen. Für den beidseitig gelenkig gelagerten Stab in Abbildung 2.1 sind diese

$$w(x=0) = w(x=L) = 0 \quad (2.11)$$

und daraus folgt

$$C_1 = 0 \text{ und } C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}}L\right) = 0. \quad (2.12)$$

$C_2 = 0$ ist eine triviale Lösung, der Stab bleibt gerade. Die Lösung von

$$\sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}}L\right) = 0 \quad (2.13)$$

gibt uns die gesuchte Knicklast, die wir mit F_k bezeichnen werden,

$$\sqrt{\frac{F_k}{EI}}L = n\pi \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.14)$$

$$\Leftrightarrow F_k = \frac{n^2\pi^2EI}{L^2}. \quad (2.15)$$

Der Parameter n gibt die Anzahl der Halbwellen der Sinusfunktion an (siehe Abbildung 2.2). Die Amplitude C_2 ist beliebig. Die kleinste und damit wesentliche Knicklast tritt bei $n = 1$ auf. In (2.15) sieht man, dass ein Erhöhen des Flächenträgheitsmoments I zu einer Erhöhung der Knicklast führt. Somit wäre die ideale Querschnittsfläche zur Vermeidung des Knickens ein Kreisring mit großem Radius und dünner Wandstärke. Dem sind jedoch durch lokales Beulen [9] Grenzen gesetzt.

Das beschriebene Phänomen wird auch als Eulersches Knicken bezeichnet. Dabei unterscheidet man zwischen vier Eulerschen Knickfällen (siehe Abbildung 2.3), die von der Lagerung des Stabs abhängen, und berechnet die Knicklast mit der allgemeinen Formel [6]

$$F_k = \frac{\pi^2EI}{L_e^2}. \quad (2.16)$$

2. Hintergrund

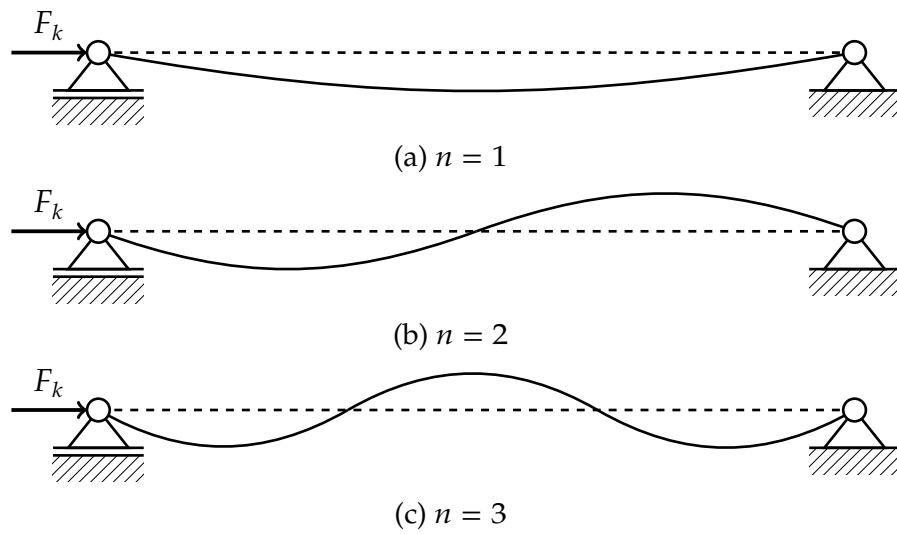


Abbildung 2.2.: Die ersten drei Eigenformen eines beidseitig gelenkig gelagerten Stabes.

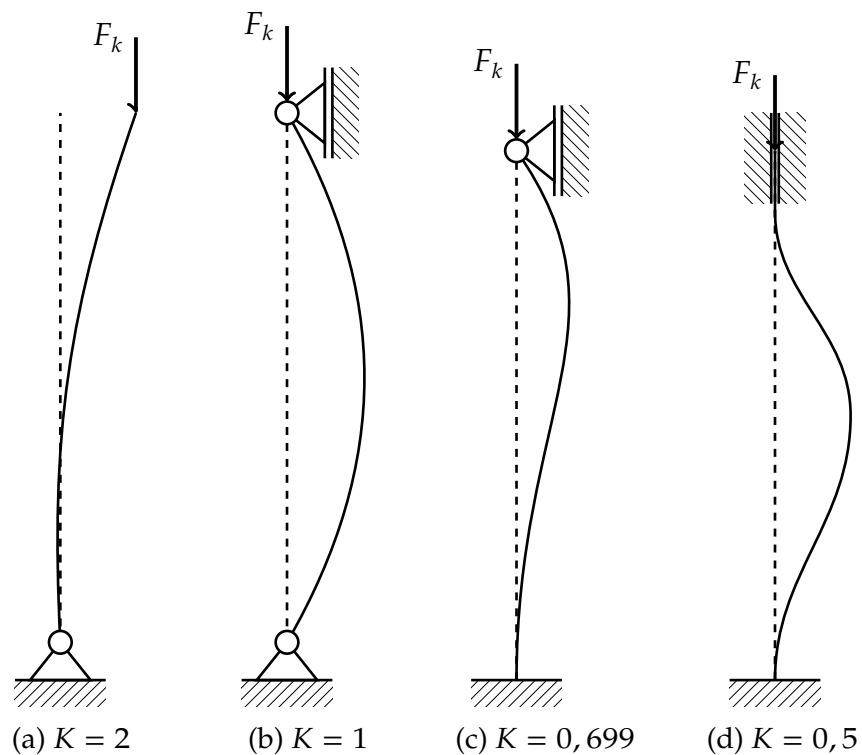


Abbildung 2.3.: Die vier Eulerschen Knickfälle.

Dabei ist L_e die effektive Knicklänge. Diese effektive Länge wird häufig mit dem effektiven Längenfaktor K ausgedrückt [6]

$$L_e = KL. \quad (2.17)$$

L ist die eigentliche Länge des Stabs. Die Werte des effektiven Längenfaktors K für unterschiedliche Lagerungen sind in Abbildung 2.3 zu sehen. Diese lassen sich analog zu dem zuvor beschriebenen Vorgehen herleiten.

2.2. Fraktales Raumstabwerk

In diesem Abschnitt wird das in [4] beschriebene fraktale Raumstabwerk dargestellt. Außerdem werden die Rechnungen nachvollzogen und wesentliche Ergebnisse hergeleitet. Dabei geht es darum, eine Druckkraft F materialsparend zwischen zwei gelenkig gelagerten Punkten mit dem Abstand L im dreidimensionalen Raum mit Hilfe einer Struktur mit dem Volumen V und einem Material mit dem Elastizitätsmodul E aufzunehmen. Zu diesem Zweck führen wir die dimensionslose Kraft

$$f = \frac{F}{EL^2} \ll 1 \quad (2.18)$$

und das dimensionslose Volumen

$$v = \frac{V}{L^3} \ll 1 \quad (2.19)$$

ein.

Wenn man nun einen Stab mit der Länge L mit kreisförmigen Vollquerschnitt vom Radius r dazu benutzt, um eben diese Druckkraft aufzunehmen, kommt es zum Versagen durch Plastizieren bzw. Bruch oder durch das zuvor beschriebene Stabknicken. Diese Versagenslast wird im folgendem mit F_k bezeichnet. Geht man davon aus, dass es zum Versagen durch Knicken kommt, besteht die dimensionslose Kraft bei beidseitiger gelenkiger Lagerung aus

$$f = \frac{F_k}{EL^2} \stackrel{(2.16)}{=} \frac{\pi^2 I}{L^4} = \frac{\pi^3}{4} \left(\frac{r}{L}\right)^4 \quad (2.20)$$

und dem dimensionslosen Volumen

$$v = \frac{V}{L^3} = \pi \left(\frac{r}{L}\right)^2. \quad (2.21)$$

Daraus folgt für das dimensionslose Kraft-Volumen-Verhältnis

$$f = \frac{\pi}{4} v^2 \Rightarrow f \propto v^2. \quad (2.22)$$

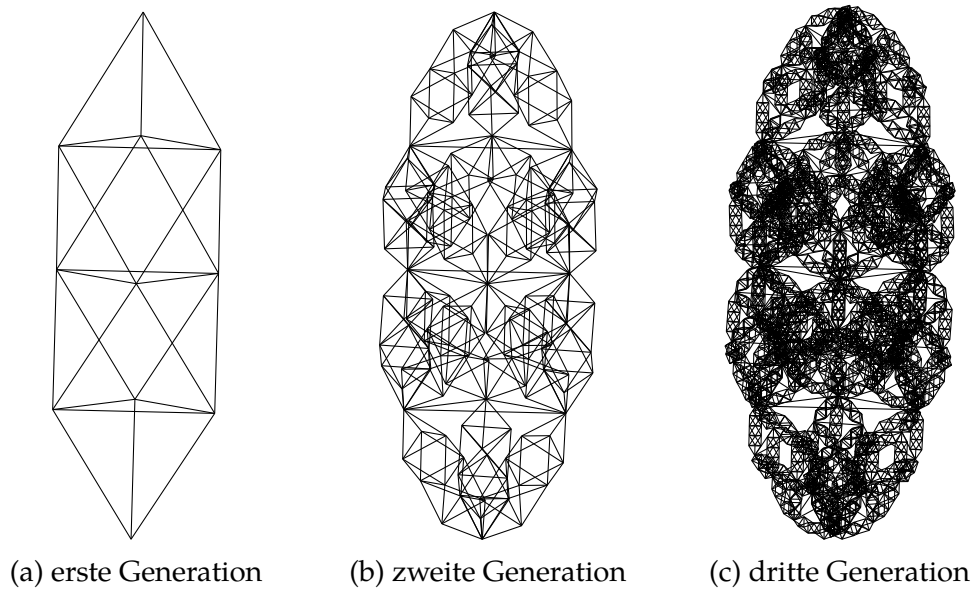


Abbildung 2.4.: Ein fraktales Raumstabwerk in unterschiedlichen Generationen.

Wenn man diesen Stab statt auf Druck auf Zug beanspruchen würde, wäre die dimensionslose Kraft durch das Versagen durch Plastizieren (Streckgrenze R_e) charakterisiert

$$f = \frac{R_e \pi}{E} \left(\frac{r}{L} \right)^2. \quad (2.23)$$

Das dimensionslose Volumen ist damit proportional zur dimensionslosen Kraft

$$f = \frac{R_e}{E} v \Rightarrow f \propto v. \quad (2.24)$$

Der Zugstab ist somit wesentlich effizienter als der Druckstab. Eventuell ist es sinnvoll die Last in einem Druckstab, dies könnte zum Beispiel die Last in einem Stuhlbein sein, auf ein Stabwerk zu verteilen?

In [4] wird ein Stabwerk beschrieben, das in seiner Grundstruktur („erste Generation“ $G = 1$) an den Enden regelmäßige Tetraeder und dazwischen regelmäßige Oktaeder (siehe Abbildung 2.4a) aufweist. Hierdurch wird die Kraft auf Druckstäbe und die effizienteren Zugstäbe aufgeteilt. Die verbleibenden Druckstäbe kann man nun wieder durch diese Grundstruktur ersetzen (siehe Abbildung 2.4b) für die „zweite Generation“ $G = 2$) und so wieder eine Aufteilung auf die effizienteren Zugstäbe erreichen. Dieses Vorgehen kann man bis ins Unendliche fortsetzen (siehe Abbildung 2.4c) für die „dritte Generation“ $G = 3$), sodass ein fraktales Stabwerk entsteht (siehe dazu auch Anhang B), welches nur noch aus den effizienten Zugstäben besteht.

Benötigt diese fraktale Struktur weniger Material als der einzelne Druckstab um einer gegebenen Belastung standzuhalten? Welche Generation dieser Gitterstruktur ist am effizientesten?

Um dies herauszufinden benötigen wir zunächst die Anzahl an Oktaedern n_i in der jeweiligen Hierarchieebene i bei der die Struktur am leichtesten wird. Hierbei ist die niedrigste Ebene die der kürzesten Stäbe $i = 0$ und die höchste Ebene die der gesamten Struktur $i = G$. In [4] wird ein Algorithmus zur Berechnung der optimalen Anzahl an Oktaedern beschrieben. Dieser wird im Folgenden hergeleitet.

Dazu nehmen wir an, dass die gesamte Struktur durch gleichzeitiges Knicken der auf Druck beanspruchten Substrukturen und Stäbe in allen Hierarchieebenen $i = 0, 1, \dots, G$ bei gelenkiger Verbindung versagt (vgl. Gleichung (2.16))

$$F_i = \frac{\pi^2 EI_i}{L_i^2}. \quad (2.25)$$

Damit ergibt sich für die kürzesten Zugstäbe und alle Druckstäbe ein Radius von

$$r = L_0 \left(\frac{4f_0}{\pi^3} \right)^{1/4} \quad \text{mit} \quad f_0 = \frac{F_0}{EL_0^2} \quad (2.26)$$

und eine Federkonstante von

$$k_0 = \frac{EA}{L_0} = \frac{E\pi r^2}{L_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} L_0 E \sqrt{f_0}. \quad (2.27)$$

Der Radius der Zugstäbe wird unter der Annahme gleicher Federkonstante der Druckstäbe bzw. gleicher effektiver Federkonstante der Substrukturen in der jeweiligen Hierarchieebene i berechnet

$$r_{z,i} = \sqrt{\frac{L_i k_i}{\pi E}} \quad \forall i = 0, 1, \dots, G - 1. \quad (2.28)$$

Die Länge in jeder Ebene berechnet sich für $i = 1, 2, \dots, G$ mit (siehe dazu auch Anhang A.1)

$$L_i = \sqrt{\frac{2}{3}} (n_i + 2) L_{i-1}. \quad (2.29)$$

Daraus folgt durch Rekursion

$$L_i = \left[\prod_{j=1}^i \sqrt{\frac{2}{3}} (n_j + 2) \right] L_0. \quad (2.30)$$

2. Hintergrund

Die Kraft ist in den Druckstäben der Tetraeder am größten und dort gilt die Beziehung für $i = 1, 2, \dots, G$

$$F_i = \sqrt{6}F_{i-1}. \quad (2.31)$$

Durch Rekursion ergibt sich

$$F_i = 6^{i/2}F_0. \quad (2.32)$$

In den Druckstäben der Oktaeder ist die Kraft nur halb so groß und identisch zu der Kraft in den Zugstäben an den Tetraedern, wenn $n_i > 0$ ist. Die Kraft in den Zugstäben der Oktaeder ist dann $F/(3\sqrt{6})$.

Die Federkonstante lässt sich nun für $i = 1, 2, \dots, G$ durch Anwendung des Satzes von Castigliano (siehe dazu auch Anhang [A.2](#)) berechnen

$$k_i = \frac{36}{11n_i + 43}k_{i-1} \quad \forall n_i > 0. \quad (2.33)$$

Hierbei wird nur die Verformung infolge der Normalkraft berücksichtigt und somit die Annahme einer dehnungsdominierten³ Struktur gemacht. Diese Annahme konnte getroffen werden, da eine zelluläre Struktur aus dehnungsdominierten Zellen auch als Ganzes dehnungsdominiert ist. In unserem Fall besteht die Struktur aus dehnungsdominierten Tetraeder- und Oktaederzellen [\[3\]](#). Durch Rekursion erhält man schließlich

$$k_i = \left[\prod_{j=1}^i \frac{36}{11n_j + 43} \right] k_0. \quad (2.34)$$

Die Biegesteifigkeit ist das Produkt aus dem Elastizitätsmodul und dem Flächenträgheitsmoment. Der Elastizitätsmodul ist ein Materialkennwert. Das Flächenträgheitsmoment berechnet sich mit dem Integral $\int_A r^2 dA$, wobei r der Abstand von der Biegeachse zum infinitesimal kleinen Flächenstück dA ist, und ist somit proportional zu dem Produkt aus quadriertem Abstand L und der Querschnittsfläche A . Somit nehmen wir für die Biegesteifigkeit an, dass wenn $n_i \rightarrow \infty$ für $i = 1, 2, \dots, G$,

$$EI_i = EBL_{i-1}^2 A_{i-1} = BL_{i-1}^3 k_{i-1} \quad (2.35)$$

gilt. Die Konstante B wird durch Simulation von Stabwerken der ersten Generation mit hoher Oktaederanzahl mittels der Finiten-Elemente-Methode ermittelt. Dabei wird angenommen, dass sich die Struktur wie ein Euler-Bernoulli-Balken verhält und bei beidseitig gelenkiger Lagerung in der Mitte mit der Kraft F belastet wird (siehe Abbildung [2.5](#)). Die analytische Lösung für die Verschiebung w ist dann [\[6\]](#)

³Bei zellulären Werkstoffen unterscheidet man zwischen dehnungsdominierten und biegedominierten Gittertypen. Siehe dazu auch [\[7\]](#).

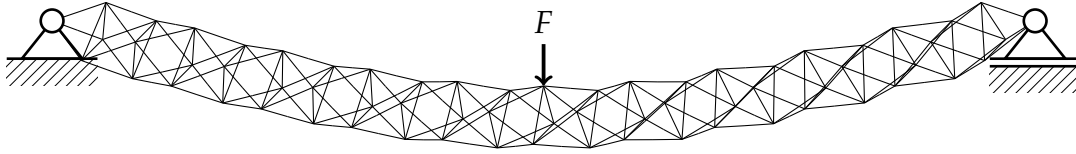


Abbildung 2.5.: Ein Raumstabwerk mit 20 Oktaedern als beidseitig gelenkig gelagerter Balken. Die Last F greift in der Mitte an.

$$w = \frac{FL^3}{16EI_i}. \quad (2.36)$$

Vergleich mit der Verschiebung aus der Simulation führt zu

$$B = 0,245 \pm 0,001. \quad (2.37)$$

Mit den Gleichungen (2.32), (2.25), (2.29), (2.35), (2.30), (2.34) und (2.27) folgt für die optimale Anzahl an Oktaedern in der Hierarchieebene $i = 1, 2, \dots, G$ in Abhängigkeit von der dimensionslosen Kraft in den Druckstäben

$$n_i = -2 + \left\lfloor \left(\frac{\pi^3}{96} \right)^{1/4} B^{1/2} (2\sqrt{3})^i f_0^{-1/4} \prod_{j=1}^{i-1} \sqrt{\frac{n_j + 2}{11n_j + 43}} \right\rfloor. \quad (2.38)$$

Die Abrundungsfunktion $\lfloor \cdot \rfloor$ wurde benutzt, da die Anzahl der Oktaeder ganzzahlig sein muss. Somit ist davon auszugehen, dass die Druckstäbe an den Tetraedern der Hierarchieebene $i = 0$ zuerst wegknicken.

Die dimensionslose Kraft für die gesamte Struktur lässt sich mit den Gleichungen (2.32) und (2.30) bestimmen

$$f = \frac{F_G}{EL_G^2} = \left(\frac{27}{2} \right)^{G/2} f_0 \prod_{j=1}^G (n_j + 2)^{-2}. \quad (2.39)$$

Um das dimensionslose Volumen zu bestimmen, berechnen wir zunächst das Volumen der Druckstäbe

$$V_d = \left[\prod_{i=1}^G (6 + 6n_i) \right] \pi r^2 L_0 \stackrel{(2.26)}{=} \frac{2L_0^3}{\sqrt{\pi}} \sqrt{f_0} \left[\prod_{i=1}^G (6 + 6n_i) \right] \quad (2.40)$$

und das der Zugstäbe

$$V_z = \sum_{i=0}^{G-1} \left[\prod_{j=i+2}^G (6 + 6n_j) \right] (3 + 3n_{i+1}) \pi r_{z,i}^2 L_i. \quad (2.41)$$

2. Hintergrund

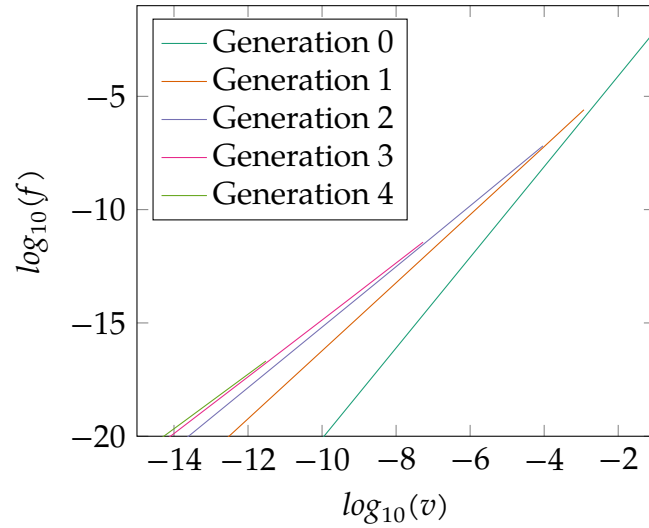


Abbildung 2.6.: Das dimensionslose Kraft-Volumen-Verhältnis des fraktalen Stabwerks.

Aus den Gleichungen (2.28), (2.30), (2.34) und (2.27) folgt

$$V_z = \frac{2L_0^3}{\sqrt{\pi}} \sqrt{f_0} \left(\sum_{i=0}^{G-1} (3 + 3n_{i+1}) \left[\prod_{j=i+2}^G (6 + 6n_j) \right] \left[\prod_{j=1}^i \frac{24(n_j + 2)^2}{11n_j + 43} \right] \right). \quad (2.42)$$

Damit berechnet sich das dimensionslose Volumen mit

$$v = \frac{V_d + V_z}{L_G^3} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{f_0} \left[\prod_{j=1}^G \left(\frac{2}{3} \right)^{-3/2} (n_j + 2)^{-3} \right] \times \left\{ \left[\prod_{i=1}^G (6 + 6n_i) \right] + \left(\sum_{i=0}^{G-1} (3 + 3n_{i+1}) \left[\prod_{j=i+2}^G (6 + 6n_j) \right] \left[\prod_{j=1}^i \frac{24(n_j + 2)^2}{11n_j + 43} \right] \right) \right\}. \quad (2.43)$$

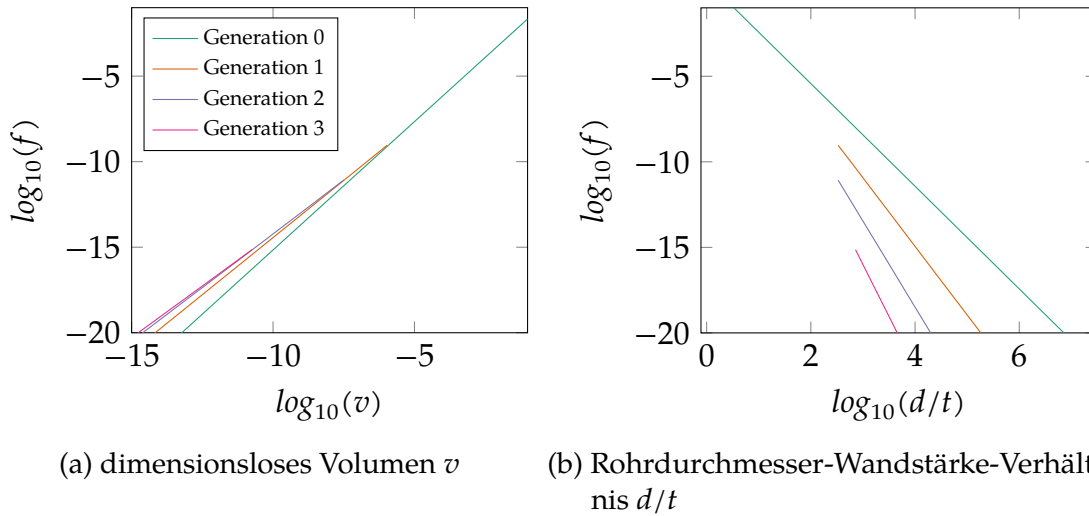
Es ist anzumerken, dass hier die Berechnung des Volumens mit Gleichung (2.43) ab einer Generationszahl größer zwei von [4] abweicht.

Für $f \rightarrow 0$ folgt ein dimensionsloses Kraft-Volumen-Verhältnis von

$$f \propto v^{(G+2)/(G+1)}, \quad (2.44)$$

das somit für $G \rightarrow \infty$ das dimensionslose Kraft-Volumen Verhältnis des Zugstabes (2.24) erreicht.

In Abbildung 2.6 wird dieses Verhalten grafisch verdeutlicht. Mit zunehmender Anzahl der Generationen geht die Steigung gegen eins. Allerdings sinkt auch das Kraftniveau, sodass ein Nutzen höherer Generationen erst bei immer kleineren Kräften einsetzt und sich somit auch die Anwendungsmöglichkeiten reduzieren.


 Abbildung 2.7.: Die dimensionslose Kraft f bei Nutzung von Rohrprofilen.

Durch Nutzung eines Kreisrohrs statt eines Vollprofils kann das Verhältnis noch einmal verbessert werden [14]

$$f \propto v^{(G+3)/(G+2)}. \quad (2.45)$$

Hierbei wird Versagen durch gleichzeitiges Auftreten von Eulerschem Knicken in allen Hierarchieebenen und Plattenbeulen in den Druckstäben bei einer Versagenslast von [17]

$$F_0 = \frac{2\pi Et^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad (2.46)$$

mit der Querkontraktionszahl ν und der Wandstärke t angenommen. Dabei beruht diese kritische Last auf der Annahme einer gleichmäßigen axialen Kompression des Rohres mit $t \ll r$.

Diese Annahme ist jedoch nach Ansicht des Autors für die hier beschriebene Struktur zu optimistisch, da an den Verbindungsstellen Querkräfte auftreten, die auf die dünnen Wände des Rohres bzw. der Schale drücken.

In Abbildung 2.7a ist die dimensionslose Kraft über das dimensionslose Volumen dargestellt, während in Abbildung 2.7b die dimensionslose Kraft über das Durchmesser-Wandstärke-Verhältnis abgebildet ist. Man sieht, dass sehr dünne Rohre bzw. Zylinderschalen entstehen ($d/t > 1000$). Es kommt dann wie in Abbildung 2.8 zum lokalen Beulen an den Verbindungsstellen [12, 10] und nicht wie für Gleichung (2.46) angenommen zum Plattenbeulen symmetrisch entlang der Achse des Rohres [17].

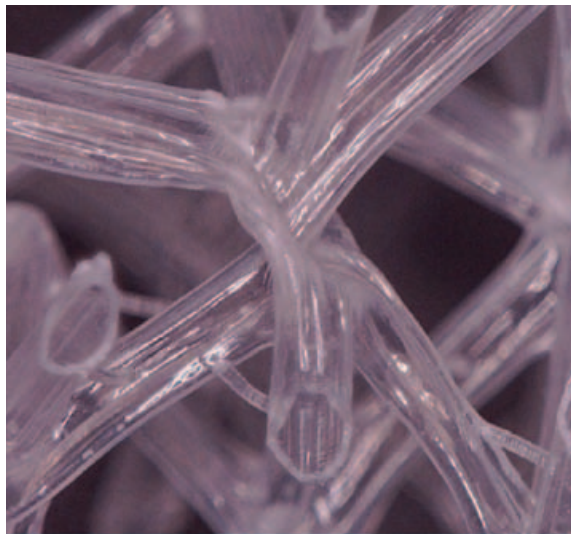


Abbildung 2.8.: lokales Beulen in einem Parylene Gitter [10]

2.3. Die Finite-Elemente-Methode bei Stabilitätsproblemen

In diesem Abschnitt wird die Anwendung der Finiten-Elemente-Methode für Stabilitätsuntersuchungen von Strukturen beschrieben. Dabei werden die wesentlichen Konzepte der Finiten-Elemente-Methode bezüglich Stabilitätsproblemen an einem Balken, der komprimiert wird, demonstriert.

2.3.1. Die Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode ist ein numerisches Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Dabei werden diese in der schwachen Form (Integralform) in Knoten und Elemente diskretisiert. Hierdurch erhält man das Gleichungssystem [2]

$$f(\mathbf{u}) = f_{int} - f_{ext} = M\ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.47)$$

Hier ist M die Massenmatrix und f der Kraftvektor an den Knoten, welcher in einen externen f_{ext} und in einen internen f_{int} Anteil zerlegt wird. Diese können linear bzw. auch nichtlinear von den gesuchten Verschiebungen \mathbf{u} abhängen.

Wenn ein statisches Problem betrachtet wird bzw. die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{u}}$ vernachlässigt werden können, reduziert sich Gleichung (2.47) zu

$$f(\mathbf{u}) = f_{int} - f_{ext} = \mathbf{0}. \quad (2.48)$$

Im Gleichgewicht sind die externen Kräfte gleich den internen Kräften. Um nun die gesuchten Verschiebungen zu bestimmen, kann z.B. das Newton-Verfahren verwendet werden.

Beim Newton-Verfahren wird das Gleichungssystem mit

$$f(\mathbf{u}_{i+1}) = f(\mathbf{u}_i) + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_i} (\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) \quad (2.49)$$

durch eine Taylorreihenentwicklung [16] und Abbruch nach dem linearen Term approximiert. Mit der Gleichgewichtsbedingung $f(\mathbf{u}_{i+1}) = \mathbf{0}$ folgt

$$J(\mathbf{u}_i)(\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) = -f(\mathbf{u}_i) \quad (2.50)$$

mit der Jacobi-Matrix

$$J(\mathbf{u}_i) = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_i}. \quad (2.51)$$

Nun kann mit einem Startwert \mathbf{u}_0 die Lösung der Gleichung (2.48) durch Iteration angenähert werden.

Sind die externen Kräfte f_{ext} unabhängig von den Verschiebungen \mathbf{u} , dann reduziert sich die Jacobi-Matrix zu

$$J(\mathbf{u}_i) = \left. \frac{\partial f_{int}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_i}. \quad (2.52)$$

Diese wird auch als tangentielle Steifigkeitsmatrix bezeichnet.

Sind zusätzlich noch die internen Kräfte f_{int} linear von den Verschiebungen \mathbf{u} abhängig, dann gilt

$$f_{int} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (2.53)$$

und aus Gleichung (2.48) wird folglich

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = f_{ext}. \quad (2.54)$$

Die Matrix \mathbf{K} bezeichnet man als Steifigkeitsmatrix. Dieses Gleichungssystem kann ohne großen numerischen Aufwand z.B. mit dem Gauß-Verfahren [16] gelöst werden.

2.3.2. Stabilitätsprobleme

Man unterscheidet zwischen materiellen und geometrischen Stabilitätsproblemen. Erstere sind Stabilitätsprobleme infolge von Materialversagen durch z.B. Plastizieren oder Bruch. Letztere bezeichnen Instabilitäten, die aufgrund der Geometrie

der Struktur entstehen. Dabei wird zwischen Verzweigungsproblemen und Durchschlagsproblemen unterschieden.

Ein Verzweigungsproblem haben wir bereits in Abschnitt 2.1 mit dem Stabknicken kennengelernt. Von einer bestimmten Last an verzweigt sich die Gleichgewichtskonfiguration des Knickstabes in einen primären und in einen sekundären Zweig. Man bezeichnet diesen Punkt auch als Verzweigungspunkt und spricht dann von einer indifferenten Gleichgewichtslage. Um zu bestimmen, ob sich der Gleichgewichtspunkt \mathbf{u} an einem Verzweigungspunkt befindet, perturbieren wir diesen mit $\Delta\mathbf{u}$ und führen eine lineare Taylorreihenentwicklung von Gleichung (2.48) an diesem Punkt durch

$$f(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + J(\mathbf{u})\Delta\mathbf{u}. \quad (2.55)$$

Da es sich bei \mathbf{u} um Verschiebungen in einer Gleichgewichtskonfiguration handelt, verschwindet $f(\mathbf{u})$. Ist $f(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u})$ ebenfalls im Gleichgewicht, so folgt

$$J(\mathbf{u})\Delta\mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \det J(\mathbf{u}) = 0 \quad \forall \Delta\mathbf{u} \neq \mathbf{0}. \quad (2.56)$$

Die Determinante der Jacobi-Matrix verschwindet an einem Verzweigungspunkt.

Bei Durchschlagsproblemen handelt es sich um Phänomene, bei denen sich das Vorzeichen der Steifigkeit eines Systems ändert. Ab diesem kritischen Punkt, welcher auch als Durchschlagspunkt bezeichnet wird, kann das System keine zusätzlichen Kräfte mehr aufnehmen. Es kommt zum kritischen Lastabfall. Beim Durchschlagspunkt handelt es sich um einen stationären Punkt und damit gilt auch hier Gleichung (2.56).

Somit gilt allgemein an einem kritischen Punkt, dass die Determinante der Jacobi-Matrix zu null wird und somit das spezielle Eigenwertproblem

$$(J(\mathbf{u}) - \lambda I)v = \mathbf{0} \quad \forall \lambda = 0 \quad (2.57)$$

zu lösen ist. Dabei sind λ_i die Eigenwerte mit den zugehörigen Eigenvektoren v_i .

Zur Bestimmung der kritischen Punkte muss also die Gleichgewichtskonfiguration eines Systems bekannt sein, bzw. man muss begleitend zu einer statischen Analyse, bei der ein Gleichgewichtspfad ermittelt wird (Kraft-Verschiebungs-Kurve), die kritischen Punkte durch Überprüfung der Determinante der Jacobi-Matrix bestimmen. Dabei ist es allerdings möglich und die Regel, dass man diese überspringt. Aus diesem Grund überprüft man, ob sich die Vorzeichen der Eigenwerte der Jacobi-Matrix ändern. Dies indiziert, dass die Determinante der Jacobi-Matrix null war und somit ein kritischer Punkt übersprungen wurde. Zur genauen Bestimmung dieses kritischen Punktes kann dann z.B. das Gleichungssystem mit Gleichung (2.57) erweitert werden [18]. Um bei der weiteren statischen Analyse auf einen anderen Pfad zu wechseln, muss das System mit den Eigenvektoren aus Gleichung (2.57) perturbiert und so das postkritische Verhalten untersucht werden.

Durch Linearisierung der Jacobi-Matrix können die kritischen Punkte auch vorher abgeschätzt werden. Dieses Verfahren wird auch als *lineare Stabilitätsanalyse* bezeichnet. Hierbei wird angenommen, dass die Belastung f_{ext} unabhängig von den Verschiebungen \mathbf{u} ist und die Jacobi-Matrix bzw. jetzt die tangentiale Steifigkeitsmatrix in

$$J(\mathbf{u}) = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_\sigma \quad (2.58)$$

zerlegt wird, mit der linearen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_L und der Spannungsmatrix \mathbf{K}_σ . Die lineare Steifigkeitsmatrix ist unabhängig von der Belastung und bei der Spannungsmatrix nimmt man ein lineares Verhalten an

$$\mathbf{K}_\sigma = \lambda \mathbf{K}_\sigma^{(ref)} \quad \text{wenn} \quad f_{ext} = \lambda f_{ext}^{(ref)}. \quad (2.59)$$

$\mathbf{K}_\sigma^{(ref)}$ ist die Spannungsmatrix bei der Referenzbelastung $f_{ext}^{(ref)}$. Durch Einsetzen in Gleichung (2.56) ergibt sich das allgemeine Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K}_L + \lambda \mathbf{K}_\sigma^{(ref)})\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (2.60)$$

mit dessen Lösung die kritische Last bestimmt werden kann. Inwieweit die so ermittelte kritische Last mit der tatsächlichen übereinstimmt, hängt aufgrund der Linearisierung der tangentialen Steifigkeitsmatrix von der Größenordnung der Verformungen ab. Die zugehörigen Eigenvektoren \mathbf{v} geben lediglich die Knickform an, die Amplitude ist jedoch aufgrund der Charakteristik eines Eigenwertproblems beliebig. Die ermittelten Eigenformen können zum Beispiel als initiale Imperfektionen dienen.

2.3.3. Finite-Elemente-Analyse des Knickstabes

In diesem Abschnitt wird der Knickstab aus Abschnitt 2.1 mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode untersucht. Dazu wird ein beidseitig gelenkig gelagerter Stab (siehe Abbildung 2.1) mit dem Finite-Elemente-Paket Abaqus 6.14-1 untersucht und mit Balkenelementen diskretisiert.

Elementwahl und Diskretisierung

Hierbei bietet Abaqus 6.14-1 sowohl Balkenelemente nach der Balkentheorie von Euler-Bernoulli als auch von Timoshenko an. Erstere geht davon aus, dass der Querschnitt auch im verformten Zustand orthogonal zur Stabachse steht (schubstarr), letztere nicht und berücksichtigt damit eine Schubverformung der Querschnittsebene um einen Schubwinkel (schubweich).

2. Hintergrund

Um zu bestimmen mit welcher Elementdichte (Elemente pro Einheitslänge) der Stab diskretisiert werden soll, wird eine lineare Stabilitätsanalyse mit verschiedenen Elementdichten durchgeführt und diese Ergebnisse werden mit den analytischen Ergebnissen verglichen. Dazu werden zum einem linear interpolierte Timoshenko-Balkenelemente (B31) benutzt und zum anderen kubisch interpolierte Euler-Bernoulli-Balkenelemente (B33).

Die analytische Knicklast nach der Euler-Bernoulli-Balkentheorie wurde bereits in Abschnitt [2.1](#) hergeleitet und mit Gleichung [\(2.20\)](#) in dimensionsloser Form für den beidseitig gelenkig gelagerten Stab mit einem Kreisquerschnitt angegeben. Nach der Timoshenko-Balkentheorie ist diese [\[17\]](#)

$$f = \frac{\pi^3}{4} \left(\frac{L}{r} \right)^{-4} \left(1 + 1,11 \frac{\pi^2}{4} \frac{E}{G} \left(\frac{L}{r} \right)^{-2} \right)^{-1}, \quad (2.61)$$

mit dem Radius r , der Länge L , dem Elastizitätsmodul E und dem Schubmodul G . Unter der Annahme eines isotropen Materials gilt $E/G = 2(1 + \nu)$ [\[6\]](#), mit der Querkontraktionszahl ν . Somit lässt sich Gleichung [\(2.61\)](#) auch schreiben als

$$f = \frac{\pi^3}{4} \left(\frac{L}{r} \right)^{-4} \left(1 + 1,11 \frac{\pi^2}{2} (1 + \nu) \left(\frac{L}{r} \right)^{-2} \right)^{-1}. \quad (2.62)$$

Der relative Fehler in der Knicklast nach Euler beträgt somit durch die Annahme des schubstarren Verhaltens

$$\eta = 1,11 \frac{\pi^2}{2} (1 + \nu) \left(\frac{L}{r} \right)^{-2}. \quad (2.63)$$

Der relative Fehler nimmt also mit zunehmender Schlankheit L/r ab. Die Forderung eines relativen Fehlers η von 1 % ergibt bei einer Querkontraktionszahl ν von 0,3 eine Schlankheit von

$$\frac{L}{r} \approx 27. \quad (2.64)$$

Dieser Wert wird in den folgenden Betrachtungen als untere Grenze für das Knicken nach Euler benutzt.

Die Konvergenzanalyse für einen Stab mit dieser Schlankheitsgrenze ist in Abbildung [2.9](#) dargestellt. Hierbei wird der relative Fehler prozentual über die Elementdichte für linear interpolierte Timoshenko-Balkenelemente B31 (siehe Abbildung [2.9a](#)) und für kubisch interpolierte Euler-Bernoulli-Balkenelemente B33 (siehe Abbildung [2.9b](#)) aufgetragen. Der relative Fehler besteht dabei in der Differenz aus analytischer Lösung und Finite-Elemente-Lösung, bezogen auf die analytische Lösung. Es wurde eine Querkontraktionszahl von 0,3 benutzt.

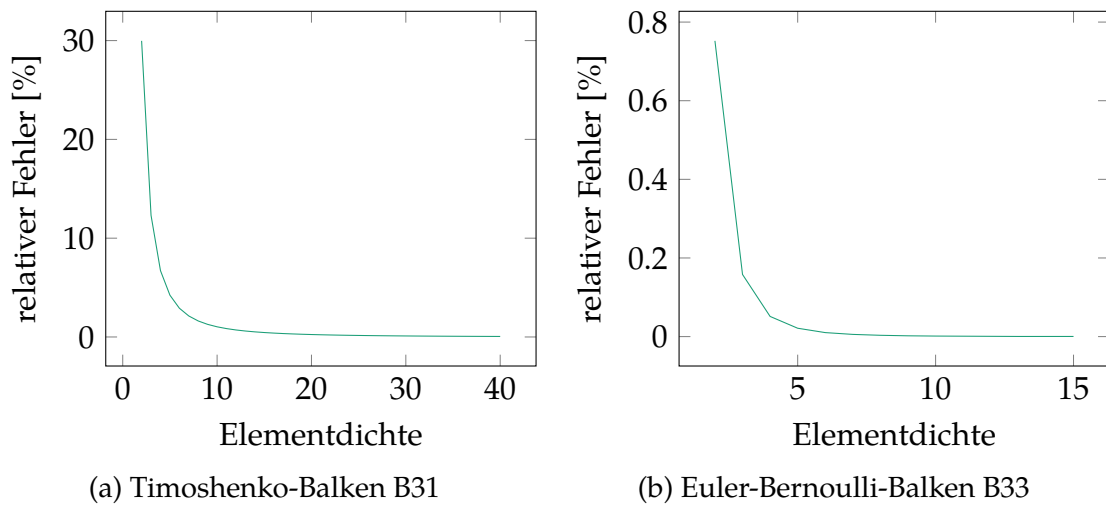


Abbildung 2.9.: Das Konvergenzverhalten von Abaqus-Balkenelementen bei einer linearen Stabilitätsanalyse.

Man sieht, dass bei Verwendung von B33-Elementen deutlich weniger Elemente notwendig sind als bei Verwendung von B31-Elementen. Für einen relativen Fehler von unter einem Prozent benötigt man lediglich zwei B33-Elemente, wohingegen man elf B31-Elemente benötigt. Aus diesem Grund und weil jedes zusätzliche Element einen neuen Knoten mit sechs Freiheitsgraden benötigt, ist es sinnvoll ab einer größeren Schlankheit als 27 mit B33 Elementen zu rechnen, obwohl diese zusätzlich zwei interne Freiheitsgrade haben [1].

Es ist zu erwähnen, dass das Konvergenzverhalten der Finite-Elemente-Lösung der kritischen Last des Stabes nicht nur von der Elementdichte abhängt, sondern auch von der Schlankheit des Stabes. Eine höhere Schlankheit erfordert eine höhere Elementdichte. Allerdings ist diese Abhängigkeit verschwindend gering, sodass sie nicht näher betrachtet werden muss.

Nichtlineare Stabilitätsanalyse

Nun wird beispielhaft ein Stab unter Kompressionslast untersucht. Es wird linear elastisches, isotropes Materialverhalten mit einem Elastizitätsmodul von 210 GPa und einer Querkontraktionszahl von 0,3 angenommen. Die Länge des Stabes beträgt einen Meter und der Radius einen Zentimeter. Die Schlankheit beträgt somit 100, sodass eine Diskretisierung des Stabes mit zwei B33-Balkenelementen ausreichend ist.

Es wird eine geometrisch nichtlinear statische Analyse durchgeführt. Dabei ist mit „statischer Analyse“ das Ermitteln der Gleichgewichtskonfiguration ohne Berücksichtigung von Trägheitskräften gemeint. Es wird die Kraft-Verschiebungskurve ermittelt. Geometrische Nichtlinearität bedeutet, dass das Gleichgewicht an der ver-

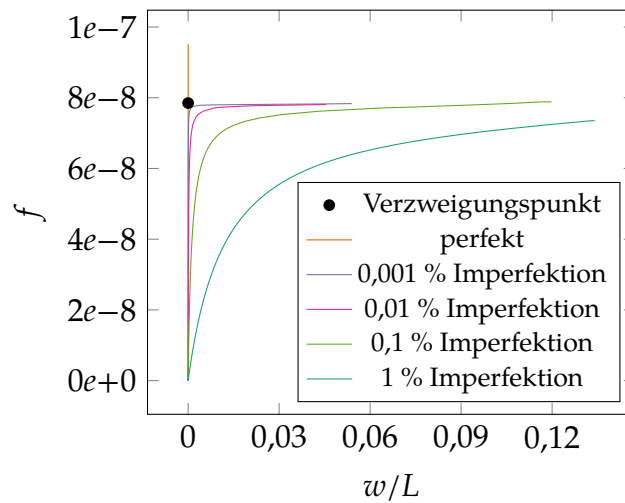


Abbildung 2.10.: Dimensionslose Kraft-Verschiebungskurven eines beidseitig gelenkig gelagerten Stabes bei Kompressionsbelastung.

formten Struktur formuliert wird. Die Verzerrungen hängen hierdurch nichtlinear von den Verschiebungen ab.

In [Abbildung 2.10](#) ist das Ergebnis dieser nichtlinearen Stabilitätsanalyse zu sehen. Man sieht, dass der Stab, der anfangs perfekt gerade ist und zentrisch mit einer Kompressionskraft belastet wird, weiterhin, auch oberhalb der Knicklast, gerade bleibt. Man sieht allerdings, dass zwischen einer dimensionslosen Kraft von $7,8 \times 10^{-8}$ und $7,9 \times 10^{-8}$ die Eigenwerte der Jacobi-Matrix negativ werden und somit ein Verzweigungspunkt überschritten wird. Dieser Wert passt zu der Knicklast, die im Rahmen einer zuvor durchgeführten linearen Stabilitätsanalyse ermittelt wurde. Hier wurde ein Wert von $7,8 \times 10^{-8}$ bestimmt.

Wenn man nun das postkritische Verhalten untersuchen möchte, bietet Abaqus 6.14-1 leider nicht die Möglichkeit begleitend auf den sekundären Ast zu wechseln. Es besteht jedoch die Möglichkeit den Stab mit den aus der linearen Stabilitätsanalyse gewonnenen Eigenformen initial zu perturbieren und so das Verzweigungsproblem in ein Spannungsproblem umzuwandeln. Dabei ist jedoch die Wahl der Amplitude der Eigenformen signifikant. Es ist deutlich zu sehen, dass ein Stab mit einer Imperfektion von nur einem Prozent deutlich früher auslenkt als ein Stab mit einer Imperfektion von 0,001 Prozent.

In diesem Beispiel werden nur die Eigenformen des kleinsten Eigenwertes der linearen Stabilitätsanalyse benutzt. In Abaqus 6.14-1 ist es aber durchaus möglich, auch andere Eigenformen zu verwenden. Dabei kann auch eine lineare Kombination der Eigenvektoren als Imperfektion verwendet werden.

3. Stabilitätsanalyse des fraktalen Stabwerks

In diesem Kapitel wird das fraktale Stabwerk mithilfe der Finiten-Elemente-Methode auf Stabilität untersucht. Zu diesem Zweck wird das kommerzielle Finite-Elemente-Paket Abaqus 6.14-1 verwendet. Dabei wird immer von linear elastischem Material mit einem Elastizitätsmodul von 210 GPa und einer Querkontraktionszahl von 0,3 ausgegangen.

3.1. Netzgenerierung

Um das fraktale Stabwerk mithilfe der Finiten-Elemente-Methode zu untersuchen, benötigt man ein Finite-Elemente-Netz der Struktur. Mit diesem Netz wird die Struktur mithilfe von Knoten und Elementen diskretisiert.

3.1.1. Stabwerk

Mit dem Algorithmus [3.1](#) werden zunächst die Elemente und Knoten der allgemeinen Struktur (erste Generation) erzeugt. Diese wird zwischen zwei vorgegebenen Punkten im dreidimensionalen Raum generiert.

Der Algorithmus [3.1](#) benötigt die Ganzzahlen *elemId*, *nodeId* und *n*, das eindimensionale Feld *elem* und die zweidimensionalen Felder *elems* und *nodes*. In *nodes* werden die Koordinaten der Knoten gespeichert. In *elems* werden die Knoten der Elemente gespeichert. Mit *elem* werden die zwei Punkte durch Zeigen auf die entsprechenden Knoten in *nodes* angegeben. Die Anzahl der Oktaeder wird mit *n* übergeben. *elemId* und *nodeId* dienen zur Indizierung von *elems* und *nodes*.

Als erstes werden die Richtungsvektoren x_1 , x_2 und x_3 erstellt. Dabei zeigt x_1 in die Richtung der Achse des Stabwerks. Die Vektoren x_2 und x_3 sollen senkrecht zu dieser und zueinander sein.

Die vorgegebenen Punkte p_1 und p_2 sind die ersten beiden Knoten des Netzes. Die restlichen Knoten befinden sich jeweils in einer Dreieckskonfiguration in der Ebene, die von x_2 und x_3 aufgespannt wird. Die Dreiecke sind jeweils immer um 180° verschoben ($x_2 \leftarrow -x_2$) und der Abstand beträgt $L/(n + 2)$.

Zur Bestimmung der Elemente werden die generierten Knoten entsprechend der Geometrie von Tetra- und Oktaeder verbunden.

Algorithmus 3.1 Generierung des Fachwerks

```

1: procedure STRUCTURE(elem, elems, elemId, nodes, nodeId, n)
2:    $\mathbf{p}_1 \leftarrow \text{nodes}[\text{elem}[1]]$ 
3:    $\mathbf{p}_2 \leftarrow \text{nodes}[\text{elem}[2]]$ 
4:    $L \leftarrow \|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1\|$ 
5:    $L_0 \leftarrow \sqrt{3/2}L/(n + 2)$ 
6:    $\mathbf{x}_1 \leftarrow (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)/L$ 
7:    $\mathbf{x}_3 \leftarrow \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \quad \forall \mathbf{x}_2 \in \{\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}_2 \perp \mathbf{x}_1 \ \& \ \|\mathbf{x}_2\| = 1\}$ 
8:    $\text{elems}[\text{elemId} + 1] \leftarrow (\text{elem}[0], \text{nodeId} + 1)$ 
9:    $\text{elems}[\text{elemId} + 2] \leftarrow (\text{elem}[0], \text{nodeId} + 2)$ 
10:   $\text{elems}[\text{elemId} + 3] \leftarrow (\text{elem}[0], \text{nodeId} + 3)$ 
11:   $\text{elemId} \leftarrow \text{elemId} + 3$ 
12:  for  $i \leftarrow 1, n + 1$  do
13:     $\text{nodes}[\text{nodeId} + 1] \leftarrow \mathbf{p}_1 + i\sqrt{2/3}L_0\mathbf{x}_1 + \sqrt{1/12}L_0\mathbf{x}_2 - L_0/2\mathbf{x}_3$ 
14:     $\text{nodes}[\text{nodeId} + 2] \leftarrow \mathbf{p}_1 + i\sqrt{2/3}L_0\mathbf{x}_1 - \sqrt{1/3}L_0\mathbf{x}_2$ 
15:     $\text{nodes}[\text{nodeId} + 3] \leftarrow \mathbf{p}_1 + i\sqrt{2/3}L_0\mathbf{x}_1 + \sqrt{1/12}L_0\mathbf{x}_2 + L_0/2\mathbf{x}_3$ 
16:     $\mathbf{x}_2 \leftarrow -\mathbf{x}_2$ 
17:     $\text{elems}[\text{elemId} + 1] \leftarrow (\text{nodeId} + 1, \text{nodeId} + 2)$ 
18:     $\text{elems}[\text{elemId} + 2] \leftarrow (\text{nodeId} + 2, \text{nodeId} + 3)$ 
19:     $\text{elems}[\text{elemId} + 3] \leftarrow (\text{nodeId} + 3, \text{nodeId} + 1)$ 
20:    if  $i \neq n + 1$  then
21:       $\text{elems}[\text{elemId} + 4] \leftarrow (\text{nodeId} + 1, \text{nodeId} + 4)$ 
22:       $\text{elems}[\text{elemId} + 5] \leftarrow (\text{nodeId} + 1, \text{nodeId} + 5)$ 
23:       $\text{elems}[\text{elemId} + 6] \leftarrow (\text{nodeId} + 2, \text{nodeId} + 4)$ 
24:       $\text{elems}[\text{elemId} + 7] \leftarrow (\text{nodeId} + 2, \text{nodeId} + 6)$ 
25:       $\text{elems}[\text{elemId} + 8] \leftarrow (\text{nodeId} + 3, \text{nodeId} + 5)$ 
26:       $\text{elems}[\text{elemId} + 9] \leftarrow (\text{nodeId} + 3, \text{nodeId} + 6)$ 
27:       $\text{elemId} \leftarrow \text{elemId} + 9$ 
28:    else
29:       $\text{elemId} \leftarrow \text{elemId} + 3$ 
30:    end if
31:     $\text{nodeId} \leftarrow \text{nodeId} + 3$ 
32:  end for
33:   $\text{elems}[\text{elemId} + 1] \leftarrow (\text{nodeId}, \text{elem}[1])$ 
34:   $\text{elems}[\text{elemId} + 2] \leftarrow (\text{nodeId} - 1, \text{elem}[1])$ 
35:   $\text{elems}[\text{elemId} + 3] \leftarrow (\text{nodeId} - 2, \text{elem}[1])$ 
36:  return  $\text{elems}, \text{elemId}, \text{nodes}, \text{nodeId}$ 
37: end procedure

```

3.1.2. Fraktales Stabwerk

Nun kann durch Nutzung des Algorithmus [3.1](#) das fraktale Fachwerk generiert werden (Algorithmus [3.2](#)).

Algorithmus 3.2 Generierung des fraktalen Stabwerks

```

1: procedure FRACTAL( $p_1, p_2, n, G$ )
2:    $nodes[1] \leftarrow p_1$ 
3:    $nodes[2] \leftarrow p_2$ 
4:    $nodeId \leftarrow 2$ 
5:    $elems \leftarrow (1, 2)$ 
6:    $elemId \leftarrow 1$ 
7:   for  $i \leftarrow G, 1$  do
8:      $elemsTmp \leftarrow elems$ 
9:     for  $elem \in elemsTmp$  do
10:       $elems, nodes \leftarrow STRUCTURE(elem, elems, elemId, nodes, nodeId, n[i])$ 
11:    end for
12:     $elems \leftarrow elemsTmp$ 
13:  end for
14:  return  $nodes, elems$ 
15: end procedure

```

Es werden die Punkte p_1 und p_2 im dreidimensionalen Raum vorgegeben, zwischen denen das fraktale Fachwerk erzeugt werden soll. Diese sind die ersten beiden Knoten des Netzes. Zusätzlich wird das eindimensionale Feld n und die Ganzzahl G benötigt. Mit n wird die Anzahl der Oktaeder in der jeweiligen Substruktur definiert und G gibt die Anzahl der Generationen an.

Zunächst wird die Struktur der Generation 0 erstellt, welche der einfache Stab ist. Dieser besteht aus einem Element mit den Anfangsknoten. Nun wird dieses Element durch die Elemente des Fachwerks ersetzt (Algorithmus [3.1](#)). Anschließend werden eben diese Elemente wieder durch die des Stabwerks ersetzt. Dies wird G -mal durchgeführt, sodass man die Knoten und Elemente eines fraktalen Stabwerks der Generation G erhält.

Hierbei werden alle Stäbe bzw. Elemente durch die Stabwerkstruktur ersetzt. Um die in Abschnitt [2.2](#) beschriebene Struktur, in der nur die Druckstäbe durch eine verkleinerte Version der Struktur ersetzt werden, zu generieren, sind entsprechende Bedingungen in die Algorithmen [3.1](#) und [3.2](#) einzubauen.

3.1.3. Netzverfeinerung

Wie in Abschnitt [2.3.3](#) beschrieben, muss bei der Finite-Elemente-Analyse eine bestimmte Elementdichte bestehen, um eine konvergierte Lösung zu erhalten. Aus

diesem Grund muss das Netz, welches mit den zuvor beschriebenen Algorithmen erzeugt wurde und aus einem Element pro Stab besteht, verfeinert werden. Dies wird mit dem Algorithmus 3.3 umgesetzt.

Algorithmus 3.3 Netzverfeinerung

```

1: procedure REFINE(elems, nodes, nodeId, dens)
2:   elemsTmp ← elems
3:   for elem ∈ elemsTmp do
4:      $x_1$  ← nodes[elem[1]]
5:      $x_2$  ← nodes[elem[2]]
6:      $\Delta x$  ←  $x_2 - x_1$ 
7:     elems[elemId] ← (elem[1], nodeId + 1)
8:     elemId ← elemId + 1
9:     for  $i$  ← 1, dens do
10:      nodeId ← nodeId + 1
11:      nodes[nodeId] ←  $x_1 + \Delta x / dens * i$ 
12:      if  $i \neq dens - 1$  then
13:        elems[elemId] ← (nodeId + 1, nodeId + 2)
14:        elemId ← elemId + 1
15:      end if
16:    end for
17:    elems[elemId] ← (nodeId + 1, elem[2])
18:  end for
19:  return nodes, elems
20: end procedure

```

3.1.4. Allokation

Um die zuvor beschriebenen Algorithmen zu implementieren, ist es sinnvoll die Felder für die Knoten und Elemente vorher zu allokkieren. Zu diesem Zweck muss man im Vorhinein die Größe der Felder und damit die Anzahl der Knoten und Elemente kennen. Die Anzahl der Elemente des Netzes ist gleich der Anzahl der Elemente der Substruktur der Generation $G - 1$ multipliziert mit der Anzahl der Substrukturen der Generation $G - 1$ in der Struktur G . Dies lässt sich rekursiv fortführen und es folgt

$$N_{Elemente}(G) = (9 + 9n_G)N_{Elemente}(G - 1) \quad (3.1)$$

$$= (9 + 9n_G)(9 + 9n_{G-1}) \dots (9 + 9n_1) \quad (3.2)$$

$$= \prod_{i=1}^G (9 + 9n_i). \quad (3.3)$$

Wenn man nur die Druckstäbe ersetzt, erhält man durch analoges Vorgehen für die Anzahl der Elemente auf Druck

$$N_{Druck}(G) = \prod_{i=1}^G (6 + 6n_i) \quad (3.4)$$

und für die auf Zug

$$N_{Zug}(G) = \sum_{i=1}^G (3 + 3n_i) \left[\prod_{j=i+1}^G (6 + 6n_j) \right]. \quad (3.5)$$

Die Anzahl der Knoten ist mindestens zwei (Generation 0). Mit jeder Generation kommt zusätzlich die Anzahl der Knoten in der Substruktur multipliziert mit der Anzahl der Substrukturen hinzu. So gilt, wenn alle Stäbe ersetzt werden

$$N_{Knoten}(G) = 2 + \sum_{i=1}^G (3 + 3n_i) \left[\prod_{j=i+1}^G (9 + 9n_j) \right] \quad (3.6)$$

bzw.

$$N_{Knoten}(G) = 2 + \sum_{i=1}^G (3 + 3n_i) \left[\prod_{j=i+1}^G (6 + 6n_j) \right], \quad (3.7)$$

wenn nur die Druckstäbe ersetzt werden.

3.2. Lineare Stabilitätsanalyse

In diesem Abschnitt wird das in Abschnitt [2.2](#) beschriebene fraktale Stabwerk mithilfe der linearen Stabilitätsanalyse untersucht und diese Ergebnisse werden mit den analytischen verglichen. Die Stäbe werden mit linearen Timoshenko-Balkenelementen (B31) modelliert, da bei Verwendung von kubischen Bernoulli-Balkenelementen (B33) die geometrisch nichtlinearen Berechnungen nicht konvergiert sind. Somit wird ein Stab nach der Konvergenzanalyse aus Abschnitt [2.3.3](#) mit 11 Elementen diskretisiert, um einen relativen Fehler von unter einen Prozent im Vergleich zur analytischen Knicklast zu haben.

Die Anzahl der Freiheitsgrade nimmt mit abnehmenden Volumen – und damit steigender Zahl von Oktaedern – und steigender Zahl der Generationen rasant zu und somit auch der numerische Aufwand. Dies stellt vorerst lediglich einen erhöhten Rechenaufwand dar. Allerdings besteht in Abaqus eine Speichergrenze für die Knoten. Ein Knoten benötigt bei Balkenelementen im dreidimensionalen Raum 48 Bytes zur Speicherung von Koordinaten und Normalen. Dies bedeutet, dass das Modell bis zu 41,67 Millionen Knoten haben kann. Somit können die hier

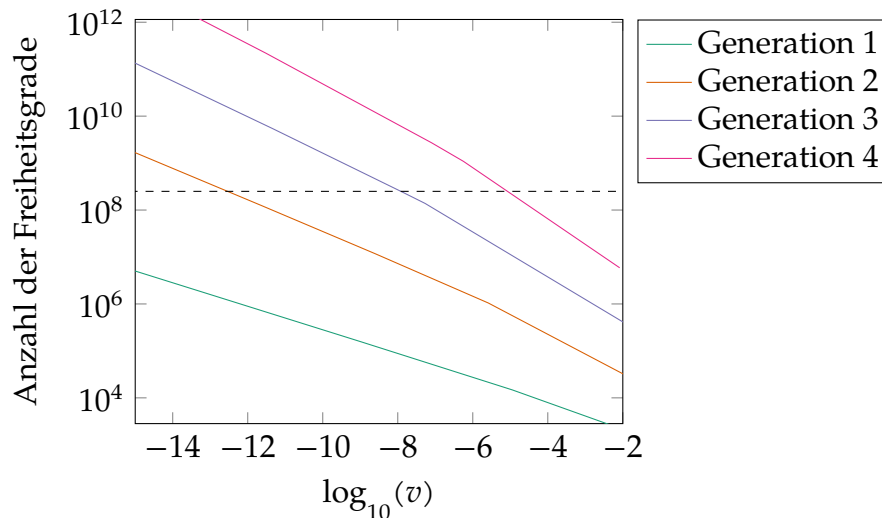


Abbildung 3.1.: Die Anzahl der Freiheitsgrade in Abhängigkeit vom dimensionslosen Volumen v bei Nutzung von elf Balkenelementen (B31) pro Stab.

betrachteten Modelle bis zu 250 Millionen Freiheitsgrade haben. In [Abbildung 3.1](#) sind die Anzahl der Knoten in Abhängigkeit des dimensionslosen Volumens dargestellt. Die schwarze gestrichelte Linie bezeichnet die Grenze von 250 Millionen Freiheitsgraden.

3.2.1. Gelenkige Verbindung

Wir betrachten zunächst das fraktale Stabwerk bei Annahme einer gelenkigen Verbindung der Stäbe. Dies bedeutet, dass an den Verbindungsstellen die translatorischen Freiheitsgrade der Elemente gleich und die rotatorischen frei sind. Um eine kinematische Unbestimmtheit zu vermeiden, werden die Torsionsfreiheitsgrade nicht „befreit“.

Es ist zu erwarten, dass die analytischen Ergebnisse aus [Abschnitt 2.2](#) umso genauer sind, je größer die Anzahl der Oktaeder ist, da die Struktur für $n \rightarrow \infty$ zu einem Stab wird.

Diese Annahme wird durch die linearen Stabilitätsanalysen bestätigt, wie in [Abbildung 3.2](#) zu sehen ist. Man sieht, dass sich die kritischen Lasten aus der analytischen Rechnung F_{ana} und der linearen Stabilitätsanalyse F_{fem} mit abnehmenden Volumen und damit steigender Zahl der Oktaeder einander annähern. Die kritische Last aus der linearen Stabilitätsanalyse ist bei niedriger Oktaederzahl wesentlich kleiner als die analytisch ermittelte. Dies liegt vermutlich an der mit [Gleichung \(2.35\)](#) ermittelten Biegesteifigkeit, die für große Oktaederzahlen genauer wird. Bei einer hohen Anzahl an Oktaedern ist die Knicklast aus der linearen Stabilitätsanalyse

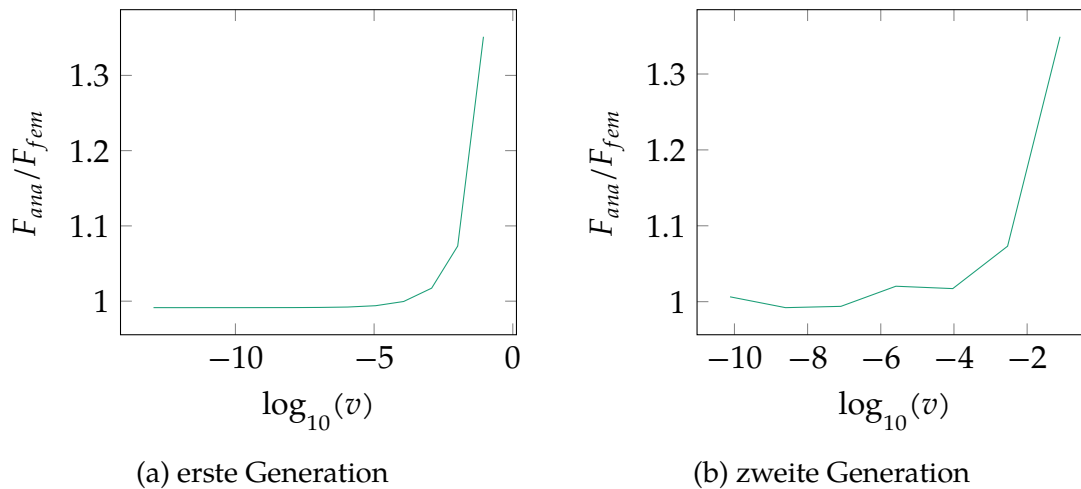


Abbildung 3.2.: Vergleich der analytischen Knicklasten F_{ana} mit den Knicklasten aus linearen Stabilitätsanalysen F_{fem} .

etwas höher (ein Unterschied von unter einem Prozent) als die analytische.

Bei der Abrundung der Zahl der Oktaeder in Gleichung (2.38) wird erwartet, dass die Druckstäbe an den Enden zuerst versagen.

Die lineare Stabilitätsanalyse kann diese Annahme für den Bereich hoher Oktaederzahlen grundsätzlich bestätigen, auch wenn es teilweise zu Kombinationen der Versagensformen kommt.

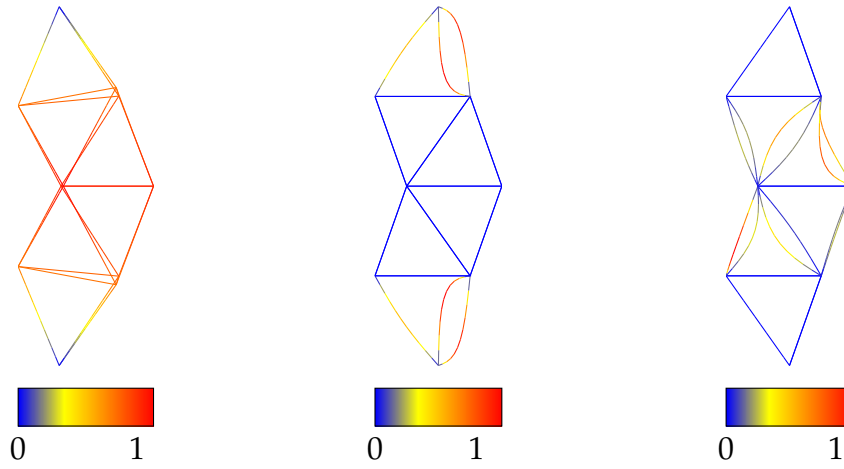
In den Abbildungen 3.3 und 3.4 sind einige Eigenformen der ersten und zweiten Generation beispielhaft dargestellt. Bei den Eigenformen der ersten Generation handelt es sich um eine optimierte Struktur, die für eine dimensionslose Versagenslast von $\log_{10}(f) = -2,64$ ausgelegt wurde. Bei der Struktur der zweiten Generation soll die Versagenslast nach analytischer Rechnung $\log_{10}(f) = -3,58$ betragen. Man erkennt die Eigenformen des Eulerschen Knickstabes in den jeweiligen Hierarchieebenen.

3.2.2. Biegesteife Verbindung

Nun wird das fraktale Raumstabwerk bei biegesteifer Verbindung der Stäbe untersucht und mit den Ergebnissen aus der linearen Stabilitätsanalyse des Stabwerks bei gelenkiger Verbindung verglichen. Bei der biegesteifen Verbindung sind die translatorischen und rotatorischen Freiheitsgrade der Elemente an den Verbindungsstellen gleich.

Es wird eine höhere Knicklast des fraktalen Raumstabwerkes bei biegesteifer Verbindung als bei gelenkiger Verbindung erwartet. Der Grund für diese Annahme liegt in zwei Effekten, die zu erwarten sind:

3. Stabilitätsanalyse des fraktalen Stabwerks

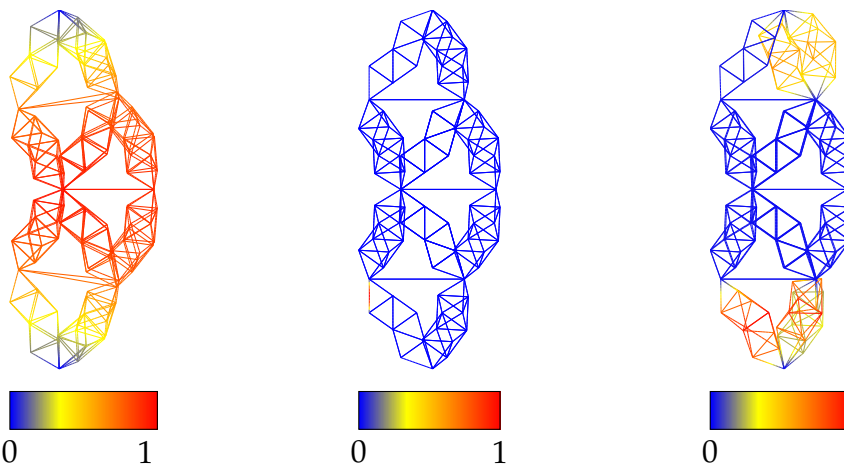


(a) $\log_{10}(f) = -2,77$

(b) $\log_{10}(f) = -2,74$

(c) $\log_{10}(f) = -2,44$

Abbildung 3.3.: Eigenformen einer Struktur der ersten Generation ($\log_{10}(v) = -1,06$) bei gelenkiger Verbindung.



(a) $\log_{10}(f) = -3,7$

(b) $\log_{10}(f) = -3,65$

(c) $\log_{10}(f) = -3,56$

Abbildung 3.4.: Eigenformen einer Struktur der zweiten Generation ($\log_{10}(v) = -1,45$) bei gelenkiger Verbindung.

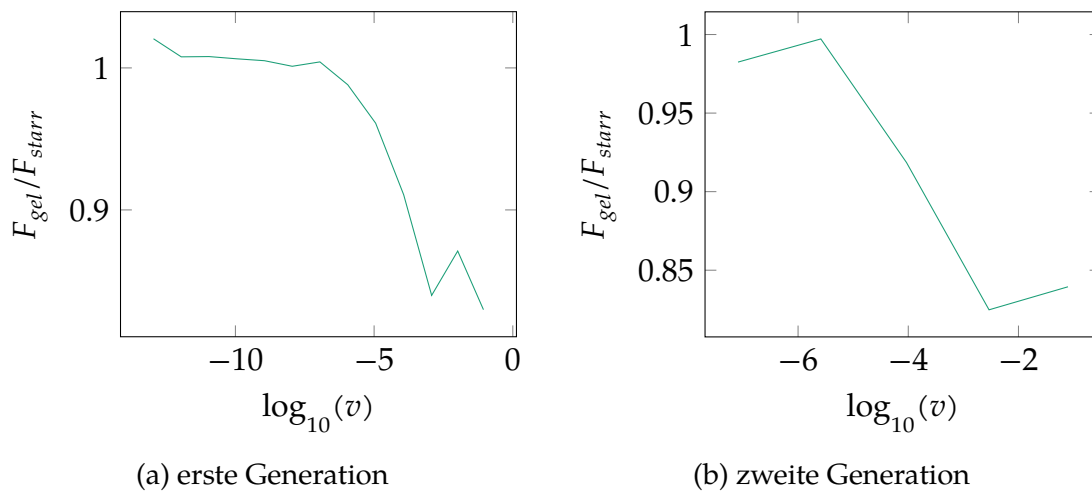


Abbildung 3.5.: Vergleich der kritischen Lasten aus linearen Stabilitätsanalysen bei gelenkiger Verbindung F_{gel} und biegesteifer Verbindung F_{starr} .

- die Biegesteifigkeit der Struktur wird größer aufgrund der biegesteifen Verbindung der einzelnen Stäbe und
- der effektive Längenfaktor sinkt, da es sich nun um einen Eulerschen Knickfall handelt der zwischen dem zweiten ($K = 1$) und dem vierten $K = 0,5$ anzusiedeln ist.

Beide Effekte sollten zu einer Erhöhung der Eulerschen Knicklast führen.

In Abbildung 3.5 wird die kritische Last bei gelenkiger Verbindung F_{gel} mit der kritischen Last bei biegesteifer Verbindung F_{starr} verglichen. Es ist zu sehen, dass die Knicklast bei biegesteifer Verbindung bei großem Volumen und damit kleiner Oktaederzahl wie erwartet größer als die Knicklast bei gelenkiger Verbindung ist. Mit steigender Anzahl der Oktaeder nähern sich beide kritische Lasten. Dies liegt daran, dass sich die Biegesteifigkeiten bei einer höheren Anzahl von Oktaedern annähern. Es wurde dieselbe Konstante B in Gleichung (2.35) bei biegesteifer Verbindung ermittelt wie für die Struktur bei gelenkiger Verbindung.

Bei den Strukturen der ersten Generation ist ein Übersteigen der kritischen Last bei gelenkiger Verbindung über die bei biegesteifer Verbindung zu beobachten (siehe Abbildung 3.5a). Der Autor konnte keine Erklärung für dieses Verhalten finden. Dies macht weitere Untersuchungen von Strukturen der zweiten Generation und höher notwendig.

In den Abbildungen 3.6 und 3.7 sind einige Eigenformen derselben Strukturen wie sie auch in Abschnitt 3.2.1 zu sehen sind dargestellt. Diese Strukturen werden nun bei biegesteifer Verbindung gezeigt. Es kommt nunmehr zu einer Überlagerung der Eigenformen von Einzelstabknicken und Knicken der Gesamtstruktur bzw. der Substrukturen.

3. Stabilitätsanalyse des fraktalen Stabwerks

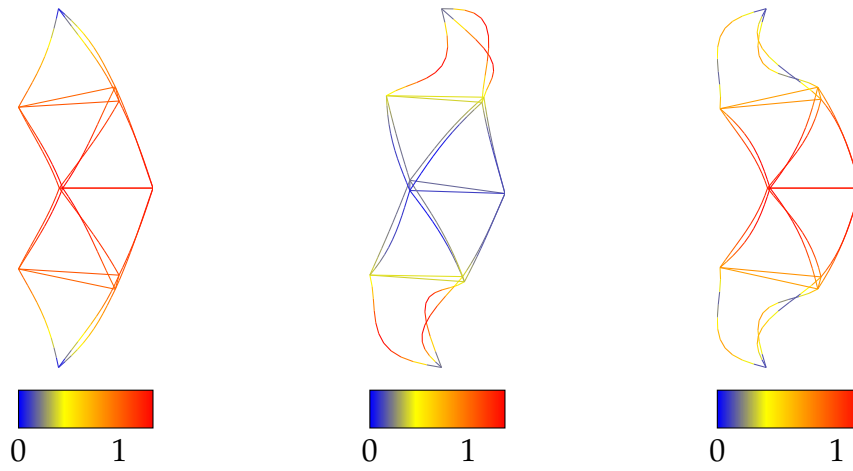


Abbildung 3.6.: Eigenformen einer Struktur der ersten Generation ($\log_{10}(v) = -1,06$) bei biegesteifer Verbindung.

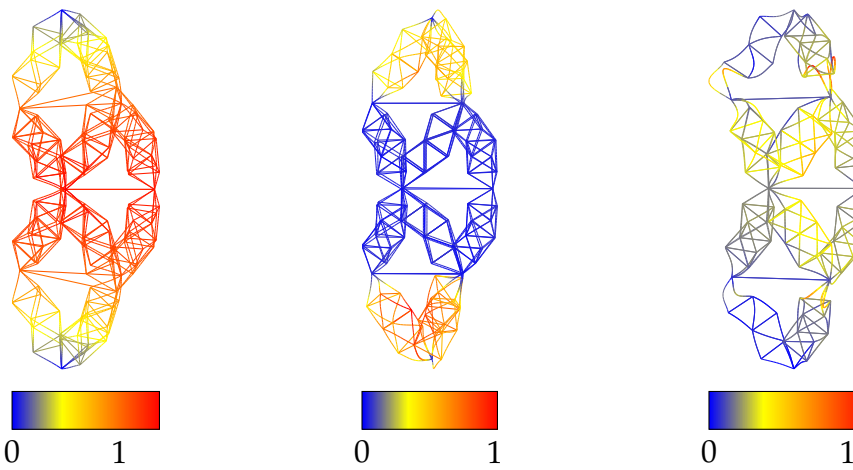
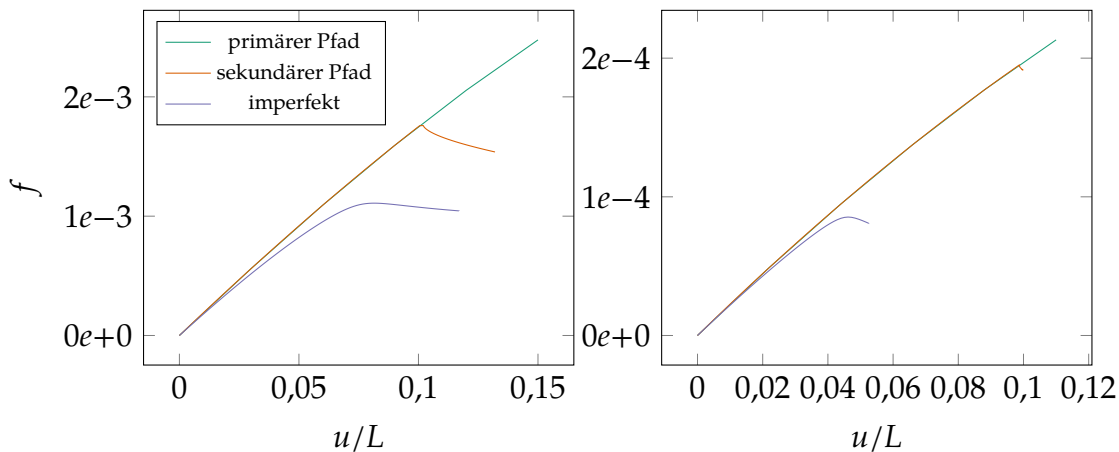


Abbildung 3.7.: Eigenformen einer Struktur der zweiten Generation ($\log_{10}(v) = -1,45$) bei biegesteifer Verbindung.



(a) erste Generation ($\log_{10}(v) = -1,06$) (b) zweite Generation ($\log_{10}(v) = -1,45$)

Abbildung 3.8.: Dimensionlose Kraft-Verschiebungskurven bei gelenkiger Verbindung unter Kompressionsbelastung.

3.3. Nichtlineare Stabilitätsanalyse

Abschließend wird eine nichtlineare Stabilitätsanalyse durchgeführt. Dabei wird das postkritische Verhalten einer Struktur der ersten Generation mit einem dimensionslosen Volumen $\log_{10}(v) = -1,06$ und einer Struktur der zweiten Generation mit einem Volumen von $\log_{10}(v) = -1,45$, jeweils bei gelenkiger und biegesteifer Verbindung, aufgezeigt.

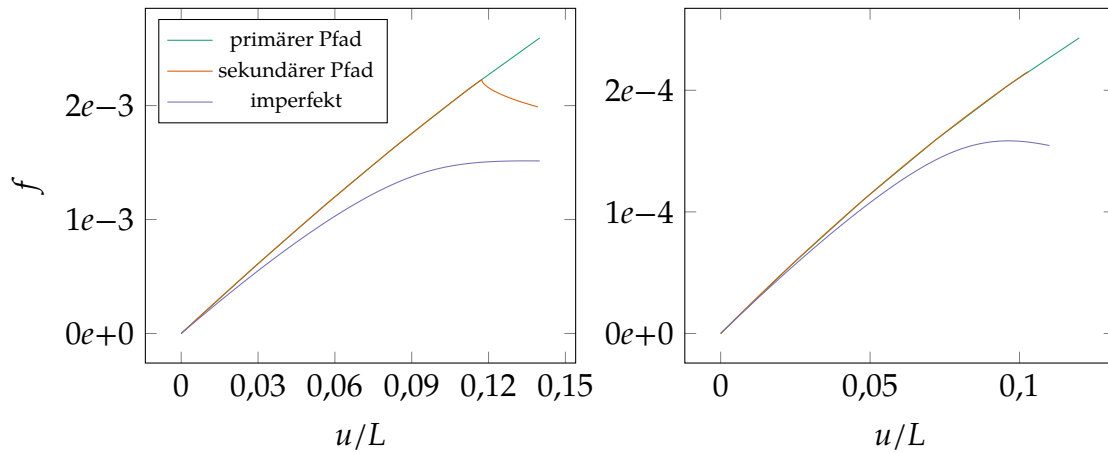
Auch wenn Abaqus 6.14-1 nicht die Möglichkeit bietet durch Perturbation auf den sekundären Zweig zu wechseln, konnte eine Auslenkung auf diesen durch Reduzierung der Schrittgröße bewirkt werden.

Zusätzlich werden die Strukturen noch bei Auftreten von initialen Imperfektionen untersucht. Dabei wurden die Strukturen mit den Eigenformen, die in den Abbildungen [3.3](#), [3.4](#), [3.6](#) und [3.7](#) dargestellt sind, initial perturbiert.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in den Abbildungen [3.8a](#), [3.8b](#), [3.9a](#) und [3.9b](#) zu sehen. Man sieht, dass die Normalverzerrungen im Stab vor dem Erreichen des Verzweigungspunktes relativ groß (größer als zehn Prozent) sind und es somit zu erwarten ist, dass es vorher zum Plastizieren oder zum Bruch kommt. Das überkritische Verhalten wird untersucht, um Rückschlüsse auf das postkritische Verhalten von Strukturen kleineren Volumens und größerer Generationszahl ziehen zu können. Bei diesen Strukturen wird die Schlankheit immer größer, sodass es dann eher zum Knicken als zu anderen Versagensformen kommt.

In allen vier Fällen kommt es ab dem Verzweigungspunkt auf dem sekundären Pfad zu einem Lastabfall. Die Strukturen können also keine weiteren Kräfte mehr aufnehmen und der anfangs statische Prozess wird in einen dynamischen

3. Stabilitätsanalyse des fraktalen Stabwerks



(a) erste Generation ($\log_{10}(v) = -1,06$) (b) zweite Generation ($\log_{10}(v) = -1,45$)

Abbildung 3.9.: Dimensionslose Kraft-Verschiebungskurven bei biegesteifer Verbindung unter Kompressionsbelastung.

umgewandelt. Dies ist hinsichtlich der Zuverlässigkeit dieser Strukturen fatal.

Auch wenn der kritische Punkt nie erreicht wird, da es keine perfekten Strukturen gibt, lässt das Wissen um den Verlauf des sekundären Zweiges Rückschlüsse auf das Verhalten einer imperfekten (tatsächlichen) Struktur zu. Dies ist auch deutlich in den Abbildungen zu sehen. Der Gleichgewichtspfad der Strukturen mit initialen Imperfektionen ähnelt denen des sekundären Zweiges und nähert sich diesem mit immer kleineren Imperfektionen (wie auch schon in Abschnitt [2.3.3](#) zu sehen ist).

4. Fazit

Zu Beginn dieser Arbeit wurde die Frage aufgeworfen, ob selbstähnliche Strukturen als effektives Konstruktionsprinzip mechanische Vorteile bieten und daher Anwendung in den Ingenieurwissenschaften finden sollten. Die Ergebnisse dieser Arbeit machen eine differenzierte Antwort erforderlich.

Es wurde verdeutlicht, dass das Prinzip der Selbstähnlichkeit auf ein einfaches Raumstabwerk angewendet eine mechanische Effizienz aufzeigen kann, indem die analytischen Rechnungen [4] hergeleitet und mit einer linearen Stabilitätsanalyse bestätigt wurden. Bei der Verwendung der noch effizienteren fraktalen Raumstabwerke mit Rohrprofilen [14] sind allerdings Fehler gemacht worden, da die geometrische Ausbildung der Rohre bzw. dünnen Zylinderschalen an den Knoten nicht angemessen durchdacht wurde. Hier müsste eine genauere analytische bzw. auch numerische Untersuchung folgen und die Struktur auf dieser Grundlage optimiert werden.

Außerdem zeigen die hier untersuchten Strukturen zwei Probleme auf:

- Sie sind nur für Kräfte kleinen Ausmaßes effizient, womit sich die Zahl der Anwendungsmöglichkeiten reduziert.
- Im überkritischen Bereich kommt es zu einem fatalen Lastabfall.

Somit kommt der Autor zu dem Schluss, dass die hier und in [4, 14, 15] untersuchten Strukturen in dieser Form kein Potential besitzen, um tatsächlich Verwendung in der Praxis zu finden. Allerdings soll dies nicht bedeuten, dass der Autor der Meinung ist, dass selbstähnliche Strukturen als effiziente Tragstrukturen nicht den Weg in die Ingenieurpraxis finden sollten. Im Gegenteil, er ist der Meinung, dass man diesen so häufig in der Natur vorkommenden Strukturen mehr Beachtung schenken sollte.

So kann man eventuell durch geschickte Veränderung der hier untersuchten Strukturen den Lastabfall im überkritischen Bereich vermeiden. Auf diese Weise könnte eine Struktur zum Beispiel Anwendung in einem Solarsegel finden oder als Metamaterial dienen. Und warum sollte es nicht eines Tages ein U-Boot in Form eines Nautilus' geben?

A. Eigenschaften des fraktalen Raumstabwerkes

Hier werden die noch nicht hergeleiteten Eigenschaften des in Abschnitt 2.2 beschriebenen fraktalen Raumstabwerkes hergeleitet.

A.1. Längen der einzelnen Substrukturen

Das fraktale Raumstabwerk besteht in seiner Grundstruktur aus regelmäßigen Tetra- und Oktaedern (siehe Abbildung 2.4). Hier wollen wir das Verhältnis der Länge einer Substruktur bzw. eines Stabes L_{i-1} in der Hierarchieebene $i-1$ zu der Länge der Substruktur bzw. Gesamtstruktur L_i in der Hierarchieebene i bestimmen. Hierzu müssen wir zunächst herausfinden, welchen Beitrag ein regelmäßiges Tetraeder und ein regelmäßiges Oktaeder in der in Abschnitt 2.2 beschriebenen Konfiguration zu der Gesamtlänge einer Substruktur leisten. Dabei besteht die Gesamtlänge einer Substruktur bzw. der Gesamtstruktur aus der Addition der Höhen von Tetraeder h_{tet} (siehe Abbildung A.1a) und Oktaeder h_{oct} (siehe Abbildung A.1b)

$$L_i = 2h_{tet} + n_i h_{oct}. \quad (\text{A.1})$$

Dabei ist n_i die Anzahl der Oktaeder in der jeweiligen Hierarchieebene i . So müssen zur Bestimmung der Gesamtlänge zunächst die Höhen der einzelnen Elementarzellen bestimmt werden.

Zu diesem Zweck schauen wir uns zunächst ein regelmäßiges Tetraeder an (siehe Abbildung A.1a). Die Länge der Seiten beträgt L_{i-1} . Die Seitenflächen sind dann Dreiecksflächen mit eben dieser Länge und einer Höhe von $\sqrt{3/4}L_{i-1}$. Die Höhe des Tetraeders h_{tet} entspricht somit der Höhe des gleichschenkeligen Dreiecks mit den Seitenlängen L_{i-1} und $\sqrt{3/4}L_{i-1}$. Somit beträgt die Höhe des regelmäßigen Tetraeders

$$h_{tet} = \sqrt{\frac{2}{3}}L_{i-1}. \quad (\text{A.2})$$

Die Höhe des regelmäßigen Oktaeders entspricht der Höhe desselben gleichschenkeligen Dreiecks. Somit sind die Höhe des Tetraeders und die des Oktaeders identisch

$$h_{okt} = h_{tet}. \quad (\text{A.3})$$

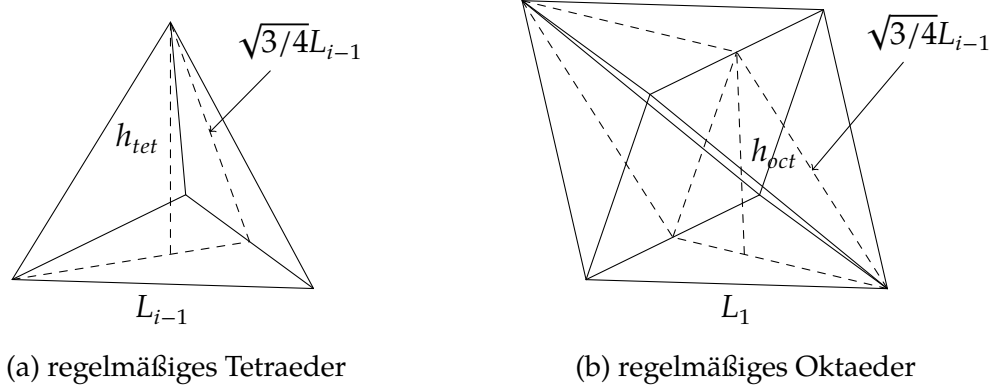


Abbildung A.1.: Elementarzellen des fraktalen Stabwerks

Die Gesamtlänge ist somit

$$L_i = \sqrt{\frac{2}{3}}(2 + n_i)L_{i-1}. \quad (\text{A.4})$$

A.2. Federkonstante

Es wird nun die Federkonstante des fraktalen Stabwerks ermittelt, bzw. die der Substrukturen. Da davon ausgegangen wird, dass die Struktur Normalkraft dominiert ist, werden nur Normalkräfte berücksichtigt. Dabei wird linear elastisches Verhalten angenommen, sodass das Hookesche Gesetz Anwendung findet. Somit gilt

$$k_i = \frac{F_i}{u_i}. \quad (\text{A.5})$$

Dabei sind F_i , k_i und u_i die Kraft, die Federkonstante und die Verformung in der Hierarchieebene i .

Die Verformung u_i lässt sich mit Hilfe des Satzes von Castigliano bestimmen. Dieser besagt, dass die partielle Ableitung der Formänderungsenergie U_i einer Struktur nach einer Kraft F_i gleich der Verformung u_i in Richtung dieser Kraft ist [6]:

$$u_i = \frac{\partial U_i}{\partial F_i}. \quad (\text{A.6})$$

Die Formänderungsenergie U_i setzt sich aus den Formänderungsenergien der Substrukturen bzw. Stäbe U_{i-1} zusammen. Für diese gilt bei Belastung mit der Kraft F_{i-1} in die Richtung u_{i-1}

$$U_{i-1} = \int F_{i-1} du_{i-1} = \frac{1}{2} \frac{F_{i-1}^2}{k_{i-1}}. \quad (\text{A.7})$$

Wenn man davon ausgeht, dass die Anzahl der Oktaeder n_i in der Hierarchieebene i größer als null ist, dann gilt: In sechs Substrukturen ist die Kraft F_{i-1} gleich $F_i/\sqrt{6}$. In sechs plus sechs mal der Anzahl der Oktaeder n_i ist sie halb so groß. Und in den restlichen $3(n_i - 1)$ Substrukturen ist sie $F_i/3\sqrt{6}$.

So gilt für die Formänderungsenergie der Gesamtstruktur bzw. Substruktur

$$U_i = \frac{43 + 11n_i}{72k_{i-1}} F_i^2. \quad (\text{A.8})$$

Damit ergibt sich mit Gleichung (A.6) eine Verformung von

$$u_i = \frac{43 + 11n_i}{36k_{i-1}} F_i \quad (\text{A.9})$$

und man erhält schließlich mit Gleichung (A.5) eine Federkonstante von

$$k_i = \frac{36}{43 + 11n_i} k_{i-1} \quad \forall n_i > 0. \quad (\text{A.10})$$

B. Dimension selbstähnlicher Objekte

Es gibt viele Definitionen des Begriffs „Dimension“. Ein Ingenieur wird darunter die Anzahl der Freiheitsgrade eines Systems verstehen. Die meisten Menschen werden allerdings mit dem Begriff die Anzahl der Ausdehnungen im Raum verbinden. Daher werden sie eine Linie als eindimensional, ein Rechteck als zweidimensional und einen Würfel als dreidimensional betrachten.

Aber welche Dimension haben selbstähnliche Objekte wie z.B. die Kochsche Schneeflocke in Abbildung [1.2b](#) oder das Sierpinski-Dreieck in Abbildung [1.2a](#)? Geht man von der Anzahl der Ausdehnungen aus, ist die Antwort zwei.

Eine weitere Möglichkeit wäre es die Objekte topologisch zu betrachten und zu versuchen die Linien mit möglichst kleinen Kreisscheiben zu überdecken. Die topologische Dimension besteht dann in der Anzahl der Überschneidungen der Kreisscheiben minus eins, also in diesem Fall eins.

Hier wird nun die Dimension für selbstähnliche Objekte betrachtet, welche der Hausdorff-Dimension für selbstähnliche Objekte entspricht. Dazu betrachten wir zunächst Linie, Quadrat und Würfel als einfache Beispiele für selbstähnliche Objekte.

Wir zerlegen eine Linie in m Teile. Diese Teile sind um den Faktor r verkleinerte Kopien der ursprünglichen Linie und es gilt

$$m = r. \tag{B.1}$$

Als nächstes zerlegen wir ein Quadrat in m Teilquadrate. Diese Teilquadrate sind um den Faktor r verkleinerte Kopien des ursprünglichen Quadrates und es gilt

$$m = r^2. \tag{B.2}$$

Geht man beim Würfel analog vor, erhält man

$$m = r^3. \tag{B.3}$$

In den Gleichungen [\(B.1\)](#), [\(B.2\)](#) und [\(B.3\)](#) ändert sich immer jeweils der Exponent des Verkleinerungsfaktors r . Der Wert dieses Exponenten entspricht der Selbstähnlichkeits-Dimension d und berechnet sich folglich mit

$$d = \frac{\ln(m)}{\ln(r)}. \tag{B.4}$$

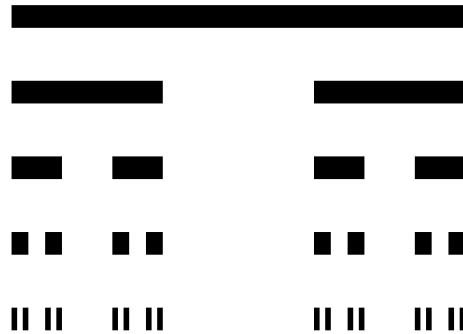


Abbildung B.1.: Cantor-Menge

So ist die Selbstähnlichkeits-Dimension der Sierpinski-Dreiecks 1,58 und die der Kochschen Schneeflocke 1,26.

Als Beispiel werden wir nun die Selbstähnlichkeits-Dimension einer Cantor-Menge berechnen. Die Cantor-Menge entsteht durch dritteln einer Linie, wobei der mittlere Teil entfernt wird. Dies wiederholt man rekursiv für die verbleibenden Linien. In Abbildung [B.1](#) sind die ersten fünf Iterationsschritte dieses Prozesses zu sehen.

Mit jedem Iterationsschritt erhält man zwei um den Faktor drei verkleinerte Kopien der ursprünglichen Menge. Die Selbstähnlichkeits-Dimension der Cantor-Menge ist somit

$$d = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0,63. \quad (\text{B.5})$$

Zum Schluss berechnen wir noch die Selbstähnlichkeits-Dimension des fraktalen Raumstabwerks, welches in dieser Arbeit untersucht wird. Dabei wird jedoch davon ausgegangen, dass die Anzahl der Oktaeder n in jeder Hierarchieebene gleich ist.

Der Verkleinerungsfaktor ist dann nach Gleichung [\(2.29\)](#)

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}(2 + n). \quad (\text{B.6})$$

Die Anzahl selbstähnlicher Teile entspricht der Anzahl an Druckstäben, die mit jeder Iteration ersetzt werden, und ist somit

$$m = 6 + 6n. \quad (\text{B.7})$$

Damit berechnet sich die Selbstähnlichkeits-Dimension des fraktalen Raumstabwerkes mit

$$d = \frac{\ln(6 + 6n)}{\ln(\sqrt{2/3}(2 + n))}. \quad (\text{B.8})$$

Die Selbstähnlichkeits-Dimension des fraktalen Stabwerks sinkt also mit steigender Oktaederanzahl und nähert sich für $n \rightarrow \infty$ der topologischen Dimension eins. Die Selbstähnlichkeits-Dimension bzw. Hausdorff-Dimension ist also größer als die topologische Dimension. Dies zeigt, dass das in dieser Arbeit untersuchte Raumstabwerk fraktal ist.

Literaturverzeichnis

- [1] V ABAQUS. 6.14 documentation. Dassault Systemes Simulia Corporation, 2014.
- [2] Ted Belytschko, Wing Kam Liu, Brian Moran, and Khalil Elkhodary. Nonlinear finite elements for continua and structures. John Wiley & Sons, 2013.
- [3] VS Deshpande, MF Ashby, and NA Fleck. Foam topology: bending versus stretching dominated architectures. *Acta Materialia*, 49(6):1035–1040, 2001.
- [4] R. S. Farr and Y. Mao. Fractal space frames and metamaterials for high mechanical efficiency. *EPL (Europhysics Letters)*, 84(1):14001, 2008.
- [5] F Simmons George. Differential equations with applications and historical notes, 1991.
- [6] James M Gere. Mechanics of materials. 2004. Thomson Brooks, Cole, 2004.
- [7] Lorna J Gibson and Michael F Ashby. Cellular solids: structure and properties. Cambridge university press, 1999.
- [8] Robert G Hohlfeld and Nathan Cohen. Self-similarity and the geometric requirements for frequency independence in antennae. *Fractals*, 7(01):79–84, 1999.
- [9] Warner Tjardus Koiter. The stability of elastic equilibrium. Technical report, DTIC Document, 1970.
- [10] Kevin J Maloney, Christopher S Roper, Alan J Jacobsen, William B Carter, Lorenzo Valdevit, and Tobias A Schaedler. Microlattices as architected thin films: Analysis of mechanical properties and high strain elastic recovery. *APL Materials*, 1(2):022106, 2013.
- [11] Benoit B Mandelbrot. The fractal geometry of nature, volume 173. Macmillan, 1983.
- [12] Marc Möller. Finite-Elemente Analyse von dünnwandigen Mikrogittern für den Einsatz im Leichtbau. Masterarbeit, 2014.
- [13] Alf Pflüger. Stabilitätsprobleme der Elastostatik. Springer-Verlag, 2013.

- [14] Daniel Rayneau-Kirkhope, Yong Mao, and Robert Farr. Ultralight fractal structures from hollow tubes. *Physical review letters*, 109(20):204301, 2012.
- [15] Daniel Rayneau-Kirkhope, Yong Mao, Robert Farr, and Joel Segal. Hierarchical space frames for high mechanical efficiency: Fabrication and mechanical testing. *Mechanics Research Communications*, 46:41–46, 2012.
- [16] Gilbert Strang. *Computational science and engineering, volume 1*. Wellesley-Cambridge Press Wellesley, 2007.
- [17] Stephen P Timoshenko and James M Gere. *Theory of elastic stability*. Courier Corporation, 2009.
- [18] Peter Wriggers. *Nonlinear finite element methods*. Springer Science & Business Media, 2008.